Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Nykštukas

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Mačys

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

50 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 1–2 klasių (*Nykštuko* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Nykštukas, 1 klasė, 50 geriausiųjų

Paulius Plerpa,	Elektrėnų pradinė mokykla,	Elektrėnų sav.,	150,00
Meda Stonytė,	Šilutės Žibų pradinė mokykla,	Šilutės r.,	146,25
Elan Narajana Jepifanov,	Ukmergės Senamiesčio pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	143,75
Kamilė Vaidogaitė,	Dzūkijos pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	141,25
Aleksas Pupliauskas,	Kauno apskrities dailės gimnazija,	Kauno m.,	141,00
Daniel Pietkiewicz,	Jono Pauliaus II progimnazija,	Vilniaus m.,	138,75
Darja Stankutė,	Mokykla-darželis „Saulutė“,	Vilniaus m.,	138,75
Rokas Braidokas,	Bartkuškio pagrindinė mokykla,	Širvintų r.,	138,75
Roman Mumm,	„Santarvės“ pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m.,	138,75
Povilas Dainauskas,	Stebulių mokykla,	Lazdijų r.,	138,25
Dovydas Šablinskas,	Kauno Gedimino vidurinė mokykla,	Kauno m.,	137,25
Denas Jarusauskas,	Meškuičių gimnazija,	Šiaulių r.,	137,00
Emilija Kekytė,	Šilutės Žibų pradinė mokykla,	Šilutės r.,	136,25
Andrej Lysenko,	„Svajos“ darželis-mokykla,	Vilniaus m.,	135,75
Danila Kruglov,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	135,75
Justas Jurčiukonis,	Ringaudų pradinė mokykla,	Kauno r.,	135,75
Aistis Gvazdauskas,	„Vilties“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	135,00
Gustas Audickas,	Antano Vienuolio pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	135,00
Izabela Pavliukovič,	Šalčininkėlių pagrindinė mokykla,	Šalčininkų r.,	135,00
Silvija Šarakojytė,	Stebulių mokykla,	Lazdijų r.,	135,00
Skomantas Jakubauskas,	Panemunės pradinė mokykla,	Kauno m.,	135,00
Agnė Jančiauskaitė,	Prienų „Ąžuolo“ pg. Nemuno pradinio ugdymo skyrius,	Prienų r.,	134,00
Danielius Čapskis,	Vladislavo Sirokomlės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	133,75
Dominyka Lenickaitė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	133,75
Eglė Karčiauskaitė,	Prienų „Ąžuolo“ pg. Nemuno pradinio ugdymo skyrius,	Prienų r.,	133,75
Lukas Kisielis,	„Gabijos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	133,75
Marija Ignatova,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	133,75
Matas Okulevičus,	Kauno Juozo Urbšio katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	133,75
Pija Chmieliauskaitė,	Montessori pradinė mokykla,	Kauno m.,	133,00
Adas Maksimovas,	Ukmergės Senamiesčio pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	132,50
Akvilė Žiūraitė,	Ukmergės rajono Taujėnų vidurinė mokykla,	Ukmergės r.,	132,50
Diana Khilkevich,	„Svajos“ darželis-mokykla,	Vilniaus m.,	132,50
Domilė Šidlaitė,	Panemunės pradinė mokykla,	Kauno m.,	132,50
Ignas Sikorskis,	Europos mokykla Briuselio-II,	Briuselio m.,	132,50
Karolina Radevičiūtė,	Mokykla-darželis „Žiburėlis“,	Vilniaus m.,	132,50
Kostas Šilingas,	Kuršėnų Pavenčių vidurinė mokykla,	Šiaulių r.,	132,50
Marius Samuilis,	Panemunės pradinė mokykla,	Kauno m.,	132,50
Ridas Dmukauskas,	Akademijos gimnazija,	Kėdainių r.,	132,50
Ugnius Norkus,	Šilutės Žibų pradinė mokykla,	Šilutės r.,	132,50
Valerija Petrovaitė,	Varėnos „Ryto“ progimnazija,	Varėnos r.,	132,50
Andrius Gasiūnas,	Ignalinos Česlovo Kudabos pagrindinė mokykla,	Ignalinos r.,	132,00
Andrius Gasiukevičius,	Ignalinos Česlovo Kudabos pagrindinė mokykla,	Ignalinos r.,	132,00
Laurynas Juškevičius,	Meškuičių gimnazija,	Šiaulių r.,	132,00
Kornelija Kadytė,	Vaišvydavos pagrindinė mokykla,	Kauno m.,	131,75
Danyla Jaroš,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	131,25
Emilija Zuokaitė,	Mokykla-darželis „Dainorėliai“,	Vilniaus m.,	131,25
Ignas Stepanauskas,	Panemunės pradinė mokykla,	Kauno m.,	131,25
Matas Čechanavičus,	Centro pradinė mokykla,	Šiaulių m.,	131,25
Saulė Damidavičiūtė,	Utenos „Žiburio“ pradinė mokykla,	Utenos r.,	131,25
Tadas Petrauskas,	Šaltinių pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	131,25
Tautvydas Špokauskas,	Ginkūnų Sofijos ir Vladimiro Zubovų pgr. mokykla,	Šiaulių r.,	131,25

Nykštukas, 2 klasė, 50 geriausiųjų

Augustas Brazdeikis,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	150,00
Ignas Engelaitis,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	150,00
Kiril Volynkin,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	150,00
Marija Krotova,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	150,00
Martynas Judzentavičius,	Garliavos Jonučių vidurinė mokykla,	Kauno r.,	150,00
Tomas Žadvydas,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	150,00
Danielė Ramanauskaitė,	Pradinė mokykla „Žiniukas“,	Vilniaus m.,	146,25
Justinas Dubinskas,	„Vėtrungės“ pradinė mokykla,	Kauno m.,	146,25
Justinas Jurčiukonis,	Šaltinių pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	146,25
Rokas Sudavičius,	Vytės Nemunėlio pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	145,00
Aleksandras Migaliov,	Mokykla-darželis „Saulutė“,	Vilniaus m.,	143,75
Gabija Sabonytė,	Lentvario pradinė mokykla,	Trakų r.,	143,75
Arnas Beišys,	Ginkūnų Sofijos ir Vladimiro Zubovų pgr. mokykla,	Šiaulių r.,	143,25
Monika Šiškevičiūtė,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	143,00
Denisa Kačinskaitė,	Rainių mokykla-darželis,	Telšių r.,	142,25
Andrėjus Storoževas,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	141,25
Brigita Bertulytė,	Viekšnių gimnazija,	Mažeikių r.,	141,25
Emilė Kleopatra Miežlaiškytė,	Vinco Bacevičiaus pradinė mokykla,	Kauno m.,	141,25
Fausta Pavolaitė,	Kapčiamiesčio Emilijos Pliaterytės mokykla,	Lazdijų r.,	141,25
Grytė Lodaitė,	Mokykla-darželis „Rūtelė“,	Kauno m.,	141,25
Ignas Žuklys,	Šeškinės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	141,25
Kasparas Savickis,	Grigiškių mokykla-darželis „Pelėdžiukas“,	Vilniaus m.,	141,25
Mantas Kukauskas,	Martyno Mažvydo progimnazija,	Vilniaus m.,	141,25
Nojus Statkevičius,	„Versmės“ progimnazija,	Klaipėdos m.,	141,25
Titas Telešius,	Vinco Bacevičiaus pradinė mokykla,	Kauno m.,	141,25
Adata Romanovska,	Rudaminos Ferdinando Ruščico gimnazija,	Vilniaus r.,	140,00
Adomas Dzidolikas,	„Romuvos“ progimnazija,	Šiaulių m.,	140,00
Adomas Mickus,	Griškabūdžio gimnazija,	Šakių r.,	140,00
Armandas Ozolas,	Salduvės progimnazija,	Šiaulių m.,	140,00
Beata Poimanskytė,	Barboros Radvilaitės pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	140,00
Dominik Mickevič,	Pabarės pagrindinė mokykla,	Šalčininkų r.,	140,00
Elzė Mazuronytė,	Žemynos progimnazija,	Vilniaus m.,	140,00
Eva Urbonaitė,	Fabijoniškių vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	140,00
Gabija Pujanauskaite,	„Aušros“ mokykla-darželis,	Vilniaus m.,	140,00
Kevinas Korsakas,	„Rasos“ progimnazija,	Šiaulių m.,	140,00
Patricija Paukštytė,	Mokykla-darželis „Rūtelė“,	Kauno m.,	140,00
Saulenis Česnauskas,	Labūnavos pagrindinė mokykla,	Kėdainių r.,	140,00
Rimgaudas Jurgaitis,	Buivydiškių pradinė mokykla,	Vilniaus r.,	139,75
Dovilė Grigaliūnaitė,	Vaidoto pagrindinė mokykla,	Kauno m.,	138,75
Elzė Grubliauskaite,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	138,75
Greta Ždankutė,	Vinco Bacevičiaus pradinė mokykla,	Kauno m.,	138,75
Kiril Krašinskij,	Aleksandro Puškino vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	138,75
Mantas Dembinskas,	Vėžaičių pagrindinė mokykla,	Klaipėdos r.,	138,75
Motiejus Tamonis,	Rumšiškių Antano Baranausko gimnazija,	Kaišiadorių r.,	138,75
Nedas Bolevičius,	Kėdainių „Ryto“ pagrindinė mokykla,	Kėdainių r.,	138,75
Nojus Domantas,	„Atžalyno“ vidurinė mokykla,	Kauno m.,	138,75
Ridas Petraitis,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	138,75
Urtė Bieliauskaitė,	Dainavos pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	138,75
Almantas Gylys,	„Pelėdos“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Darija Rževskaja,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	137,50
Liepa Ivoškutė,	Panevėžio pradinė mokykla,	Panevėžio m.,	137,50
Tomas Babelis,	Utenos Rapolo Šaltenio progimnazija,	Utenos r.,	137,50

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

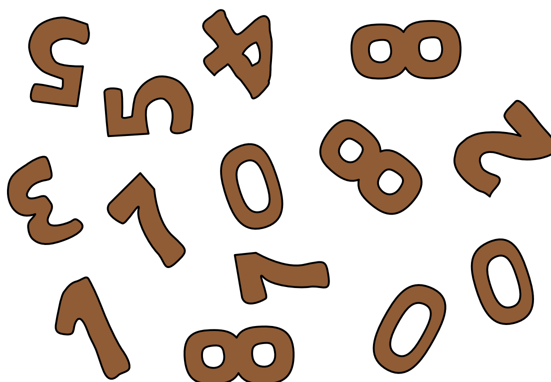
PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kurių skaitmenų čia trūksta?



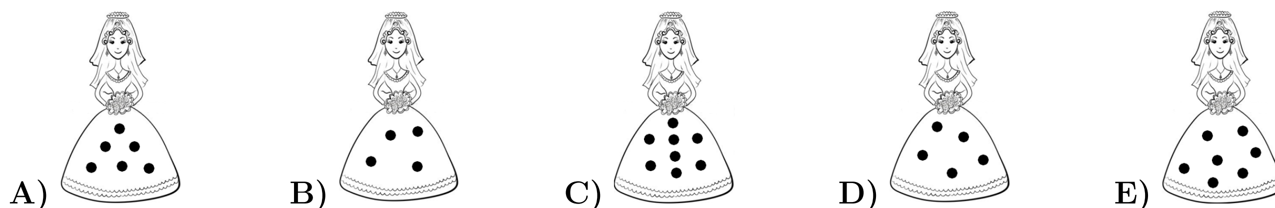
A) 3 ir 5 **B)** 4 ir 8 **C)** 2 ir 0 **D)** 6 ir 9 **E)** 7 ir 1

2. Lentynoje buvo 12 knygų. Keturi vaikai pasiėmė iš lentynos po vieną knygą.

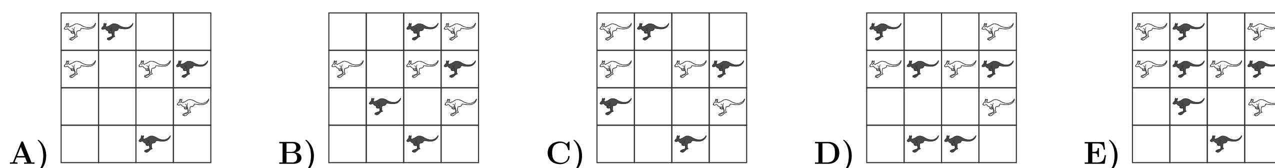


Kiek knygų liko lentynoje?
A) 12 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 0

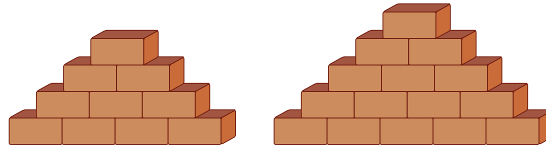
3. Kuri iš suknelių turi mažiau kaip 7, bet daugiau kaip 5 taškus?



4. Kuriame paveikslėlyje juodų kengūrų daugiau nei baltų?



5. Keliomis plytomis daugiau didesnėje krūvoje?

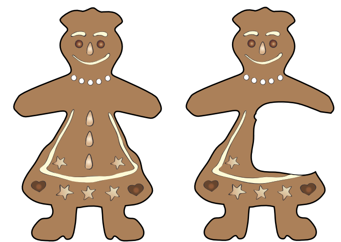


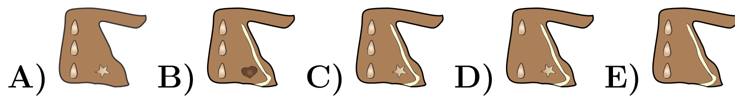
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

6. Ona turi vieną 5 centų monetą, vieną 10 centų monetą, vieną 20 centų monetą ir vieną 50 centų monetą. Kiek skirtingų kainų parduotuvėje prie kasos ji gali užmokėti be grąžos.
A) 4 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

Klausimai po 4 taškus

7. Lota atsipjovė didelį gabalą meduolio. Kurį?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

8. Ona turi . Barbora padovanojo Ievai . Jurgis dėvi . Bartas nešioja . Kuri čia Barbora?



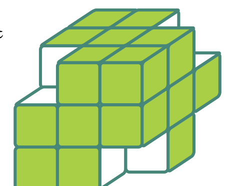
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

9. Tėvas kiekvienam iš savo trijų vaikų davė po 5 obuolius. Ona atidavė 3 obuolius Alei, o tada Alė pusę visų jos turimų obuolių atidavė Mikui. Kiek obuolių dabar turi Mikas?
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

10. Abi Jurgio katės sveria po tiek pat. Kiek kilogramų sveria viena katė, jei Jurgis sveria 30 kilogramų?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



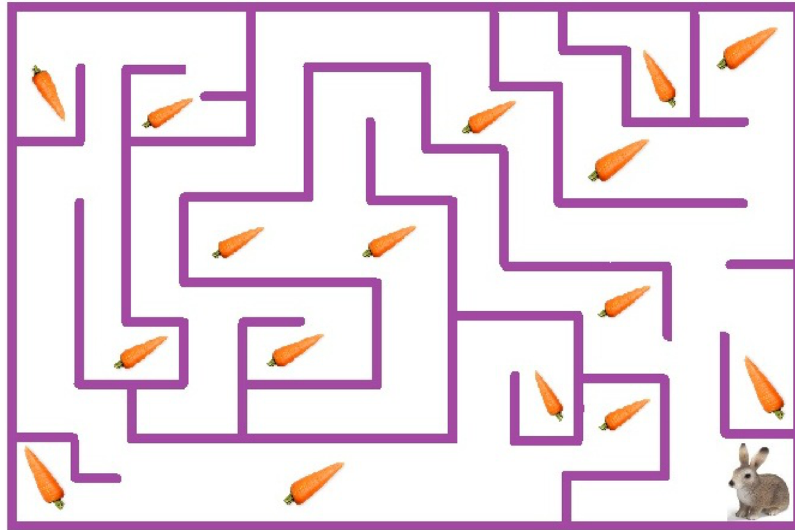
11. Iš keturių kubo kampų Adelė išėmė po kubelį (žr. pav. dešinėje). Keli iš šių penkių paveikslėlių vaizduoja kurią nors kubo sieną?





A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

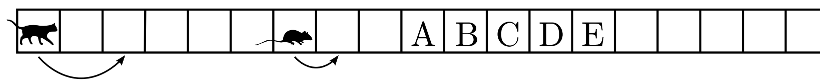
12. Kiek morkų galės sugraužti triušis, išnaršęs visą labirintą?



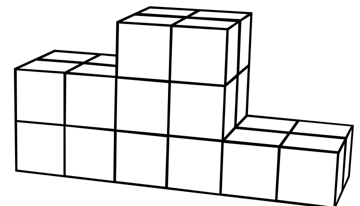
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 16

Klausimai po 5 taškus

13. Katė ir pelė juda į dešinę. Kol pelė įveikia vieną plytelę, katė įveikia dvi plyteles.



Kurioje plytelėje katė sugaus pelę?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E



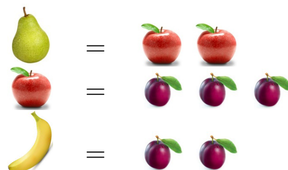
14. Štai pakyla, kurią sukrovė Petras. Kiek jam prireikė kubelių?
A) 12 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 22 **E)** 24

15. Šeimoje yra 5 vaikai. Kotryna yra 2 metais vyresnė už Barborą, bet 2 metais jaunesnė už Dorotėją. Titas yra 3 metais vyresnis už Emiliją. Barbora ir Emilija – dvynukės. Kas iš jų vyriausias?
A) Emilija **B)** Barbora **C)** Dorotėja **D)** Kotryna **E)** Titas

16. Kvadratinė dėžutė buvo užpildyta dviem sluoksniais vienodų kvadratinių šokoladukų. Emilija suvalgė visus 20 viršutinio sluoksnio šokoladukų, gulėjusių prie šoninių dėžutės sienų. Kiek šokoladukų liko dėžutėje?
A) 16 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 52 **E)** 70

17. Kamilė turi 3 brolius ir 3 seseris. Kiek brolių ir kiek seserų turi jos brolis Mikas?
A) 3 brolius ir 3 seseris **B)** 3 brolius ir 4 seseris **C)** 2 brolius ir 3 seseris
D) 3 brolius ir 2 seseris **E)** 2 brolius ir 4 seseris

18. Žaidžiant leidžiama daryti tokius keitimus:

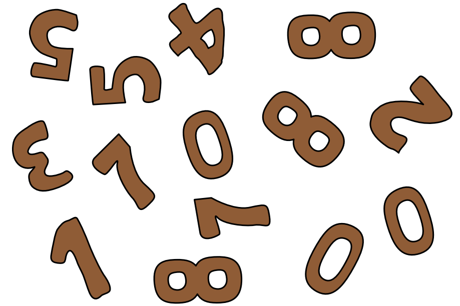


Adomas turėjo 6 kriaušes. Padarius kelis keitimus, pas Adomą liko vien tik bananai. Kiek bananų dabar turi Adomas?

A) 12 **B)** 36 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 6

Sprendimai

1. (D) 6 ir 9



! Tvarkingai vieną po kito susirašę skaitmenis, turime 5, 5, 4, 8, 3, 7, 0, 8, 2, 1, 8, 7, 0, 0. Dabar nuosekliai tikriname, kurie skaitmenys yra: 0 yra, 1 yra, 2 yra, 3 yra, 4 yra, 5 yra, 6 nėra, 7 yra, 8 yra, 9 nėra. Matome, kad nėra 6 ir 9.

!! Visai netikėta, kad net tokiame paprastame uždavinyje gali kilti klausimų. Pavyzdžiui, matome Ɛ. Bet ar tai skaitmuo 3? Žinoma, tai skaičiaus 3 atspindys veidrodyje. Be to, užduočių lapelį galima pasukti ir matysime skaitmenį 3 (beje, sukioti tenka ir kai kuriuos kitus skaitmenis). O dabar įsivaizduokite, kad mūsų paveikslėlyje nupiešta 4 (veidrodinis). Dabar sukiok nesukiojęs, o skaitmens 4 negausi. Tiesa, yra išeitis: galima sakyti, kad tai 4 veidrodyje, bet dar paprasčiau pasižiūrėti apvertus lapą prieš šviesą. O jeigu įsivaizduotume, kad skaitmenys iškirpti iš popieriaus, tai užtektų juos apversti. Tai ir yra nuolatinė matematikos uždavinių problema: ar galima tik sukioti, ar galima dar ir apversti. Kiekvieną kartą tai būtinai reikia nurodyti. Ne veltui sakoma: matematika – tikslusis mokslas.

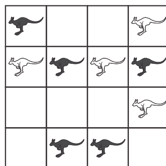
2. (B) 8

! Kadangi vaikai pasiėmė 4 knygas, tai lentynoje liko $12 - 4 = 8$ knygos.

3. (A) 

? Peržiūrinėkime sukneles. Suknelėje **A** matome 6 taškus – tai ir yra mažiau kaip 7, bet daugiau kaip 5 taškai.

! Nors Kengūros konkurse tik vienas atsakymas teisingas, verta (jei yra laiko) pasitikrinti ir peržiūrėti visas sukneles. Suknelėje **B** matysime 4 taškus, suknelėje **C** – 8, **D** – 5, **E** – 7. Taigi joks kitas atsakymas netinka.

4. (D) 

! Paveikslėlyje **A** juodų kengūrų 3, baltų – 4. Paveikslėlyje **B** jų atitinkamai 4 ir 4, paveikslėlyje **C** – 4 ir 4, paveikslėlyje **D** – 5 ir 4, paveikslėlyje **E** – 5 ir 5. Taigi tik paveikslėlyje **D** juodų kengūrų daugiau.

5. (B) 5

! Pirmoje krūvoje $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ plytų, antroje $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ plytų. Vadinasi, didesnė antroji krūva, ir joje $15 - 10 = 5$ plytomis daugiau.

!! Abi krūvos sukrautos vienodai, tik antroje krūvoje viena (apatine) eile daugiau. Joje 5 plytos, taigi antroji krūva 5 plytomis didesnė.

6. (D) 15

! Surikiuokime įmanomas kainas didėjimo tvarka. Aišku, kad mažiausia jų yra 5 centai. Vėl aišku, kad sekanti kaina yra 10, tada 15, 20, 25, 30, 35, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85. Turime 15 skirtingų sumų.

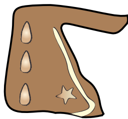
!! Galima spręsti ir kitaip. Kadangi kiekvienos monetos vertė dalijasi iš 5, tai ir galimos kainos dalysis iš 5. Didžiausią sumą sudarysime paėmę visas monetas: $5 + 10 + 20 + 50 = 85$. Vadinasi, užtenka peržiūrėti skaičius 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85. Neįmanoma sudaryti sumų 40 ir 45, kitas sudaryti galima.

Žinoma, svarbiausia sprendžiant nieko nepraleisti. Tam galima susigalvoti tvarką, kaip sumas sudaryti. Galima surašinėti, pavyzdžiui, taip:

Po 1 monetą:	5	10	20	50		
Po 2 monetas:	$5 + 10$	$5 + 20$	$5 + 50$	$10 + 20$	$10 + 50$	$20 + 50$
Po 3 monetas:	$5 + 10 + 20$	$5+10+50$	$5+20+50$	$10+20+50$		
Po 4 monetas:	$5 + 10 + 20 + 50$					

Dar viena „gudrybė“ – visus skaičius sumažinti 5 kartus. Tada monetos bus 1, 2, 4, 10, ir surašyti sumas paprasčiau:

	1	2	3	4	5	6	7
10	11	12	13	14	15	16	17

7. (C) 

! Matome, kad dešiniajame sąlygos paveikslėlyje trūksta trijų prijuostės taškų ir vienos žvaigždutės. Tris taškus ir vieną žvaigždutę turi gabalai **A** ir **C**. Tie gabalai skirias baltu prijuostės kraštu. Kadangi iš meduolio išpjovus gabalą to krašto nebeliko, tai jis turi būti išpjautame gabale, todėl renkamės gabalą **C**.



8. Ⓑ 

! **A** su akiniais, **C** su auskarais, **D** su skrybėlaite, **E** su skrybėle. Vadinasi, **A** – tai Bartas, **C** – tai Ieva, **D** – tai Ona, **E** – tai Jurgis. Liko **B** – tai ir yra Barbora.

9. Ⓔ 9

! Kai Ona 3 obuolius atidavė Alei, Alė turėjo 8 obuolius. Pusę turimų obuolių, t.y. 4 obuolius, ji atidavė Mikui. Vadinasi, Mikas dabar turi $5 + 4 = 9$ obuolius.

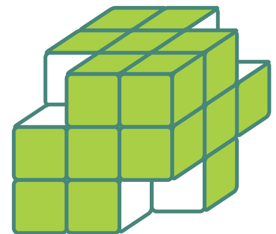
10. Ⓒ 3

! Bendras Jurgio ir kačių svoris yra 36 kilogramai. Vadinasi, abi katės sveria $36 - 30 = 6$ kilogramus, o viena katė $6 : 2 = 3$ kilogramus.

11. Ⓓ 4

! Kubo priekinėje sienoje trūksta dviejų kubelių, dešiniojoje sienoje – 3 kubelių, užpakalinėje – 2, kairiojoje – 1, viršutinėje – 2, apatinėje – 2 kubelių.





Nesunku suvokti, kad I paveikslėlyje pavaizduota apatinė siena (jei žiūrėtume gulėdami po kubeliu galva į dešinę), II paveikslėlyje – dešinioji siena (jei kabėtume dešinėje galva žemyn), III paveikslėlyje – priekinė siena, IV paveikslėlyje – kairioji siena (tik į ją reikėtų žiūrėti iš kubelio vidaus). V paveikslėlis nevaizduoja jokios sienos – juk nė vienoje sienoje netrūksta 4 kubelių, kaip kad paveikslėlyje. Vadinasi, kubo sienas vaizduoja 4 paveikslėliai.

!! Galima įsivaizduoti, kad kubas stovi ant stalo ir jį sukiojame arba vartome tol, kol norimą vaizdą gauname priekinėje kubo sienoje.

Kad gautume I paveikslėlį, kubą verčiame per užpakalinę (pagrindo) briauną (t.y. nuo savęs). Priekine siena taps



ir užtenka kubą paversti į kairę (per kairiąją briauną), kad abiejų kvadratėlių trūktų viršutiniuose kvadrato kampuose.

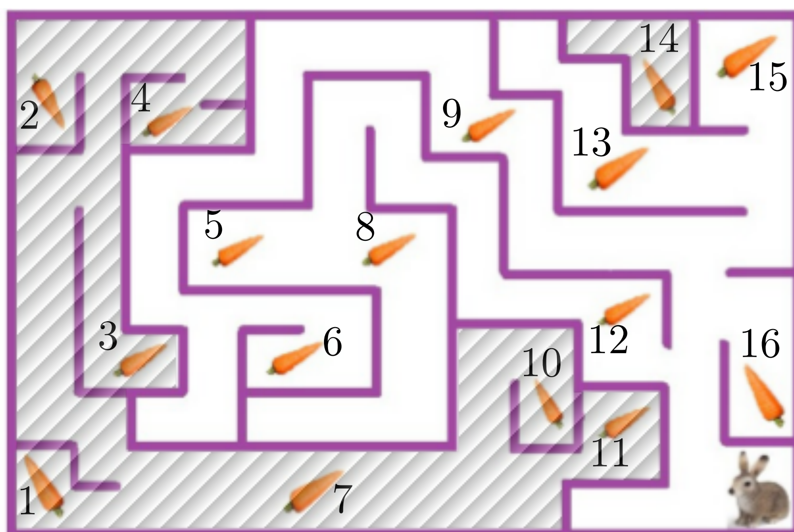
Kad gautume II paveikslėlį, dešiniąją sieną pasukame į save, ir buvusi dešinioji siena taps priekine. Netgi nesvarbu, kokia trūkstamų tarp trijų kvadratėlių padėtis – kubą galima versti į kairę (arba į dešinę) tol, kol nebetrūks kairiojo apatinio kvadratėlio.

III paveikslėlį jau matome (žiūrėdami į priekinę kubo sieną).

IV paveikslėlį gausime atsukę kubo kairiąją sieną į save, o tada versdami kubą į kairę (ar į dešinę) tol, kol trūkstamas kvadratėlis taps kairiuoju viršutiniu.

12. (B) 8

! Nesunku įsitikinti, kad triušis gali pasiekti 8 morkas. Žinoma, geriau viską daryti tvarkingai. Sunumeruokime morkas (pavyzdžiui, eidami iš kairės į dešinę):

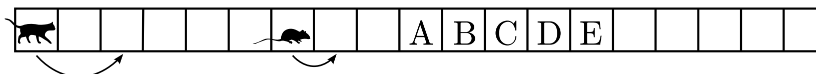


Triušius gali pasiekti morkas 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 16 (aštuonios morkos), bet negali pasiekti 1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14 morkų (kitų aštuonių).

!! Dar patogiau pastebėti, kad yra dvi sritys, atitvertos nuo triušio aklina siena (jos paveikslėlyje užtušuotos). Į tas sritis triušis patekti negali, ir jose esančios morkos liks nepaliestos. Nesunku įsitikinti, kad neužtušuotoje srityje triušis gali patekti į bet kurią vietą, t.y. prie bet kurios joje esančios morkos – tas morkas jau išvardijome.

13. (D) D

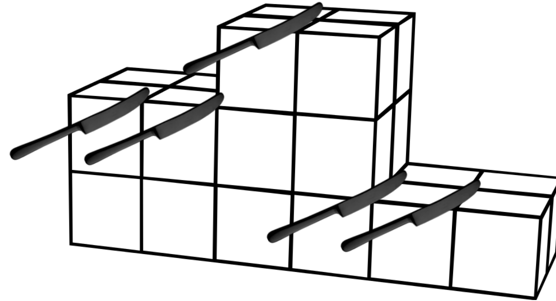
! Kol katė įveiks 6 plyteles ir atsidurs pradinėje pelės vietoje, pelė spės įveikti 3 plyteles ir pasieks plytelę A. Kai dabar pelė įveiks dar 3 plyteles, ji atsidurs ant plytelės D. Bet per tą laiką katė įveiks 6 plyteles, taigi taip pat atsidurs ant plytelės D ir sučiups pelę.



!! Uždavinį galima išspręsti ir iš karto, negalvojant apie tarpines plyteles. Kol pelė įveikia vieną plytelę, katė įveikia dvi, taigi atstumas tarp katės ir pelės sumažėja viena plytele. Iš pradžių atstumas tarp jų yra šešios plytelės, taigi jis taps lygus 0, kai pelė įveiks šešias plyteles. Tai reiškia, kad tuo momentu pelė bus šešiomis plytelėmis dešiniau, t.y. ant D plytelės.

14. (E) 24

! Mintyse suraikykime statinį į riekes, kaip parodyta paveikslėlyje.

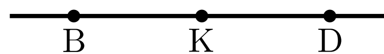


Skaičiuokime judėdami iš kairės į dešinę. Pirmoje riekėje yra 4 kubeliai – priekinis apatinis, priekinis viršutinis, užpakalinis viršutinis (jį matome), užpakalinis apatinis (jo nematome, bet būtent ant jo stovi užpakalinis viršutinis). Lygiai taip pat antroje riekėje yra 4 kubeliai. Panašiai skaičiuodami, trečioje ir ketvirtoje riekėje turime po 6 kubelius, o penktoje ir šeštoje – po 2 kubelius. Taigi iš viso statinyje yra $4+4+6+6+2+2=24$ kubeliai.

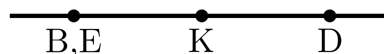
!! Matome, kad statinį sudaro dvi vienodos dalys – priekinė ir užpakalinė. Priekinėje statinio sienoje matome 12 kubelių, taigi iš viso jų yra $12 \cdot 2 = 24$.

15. (C) Dorotėja

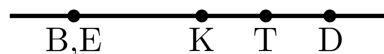
! Išrikiuokime Kotryną, Barborą ir Dorotėją pagal amžių: Kotryna (K) 2 metais vyresnė už Barborą (B), Dorotėja (D) 2 metais vyresnė už Kotryną:



Barbora ir Emilija (E) yra dvynukės:



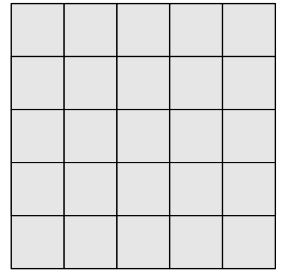
Titas (T) 3 metais vyresnis už Emiliją, Kotryna – 2 metais, Dorotėja 4 metais. Taigi Titą reikią statyti viduryje tarp Kotrynos ir Dorotėjos:



Matome, kad vyriausia iš vaikų – Dorotėja.

!! Panašiai sprendžiame ir be paveikslėlių. Lyginkime visų amžių su Barboros (taigi ir su jos vienmetės Emilijos). Kotryna 2 metais vyresnė už Barborą. Dorotėja 2 metais vyresnė už Kotryną, taigi 4 metais – už Barborą. Titas 3 metais vyresnis už Barborą (nes tiek jis vyresnis už Emiliją). Kadangi Dorotėja už Barborą vyresnė 4 metais, Titas – 3 metais, Kotryna – 2 metais, Emilija vienmetė su Barbora, tai vyriausia yra Dorotėja.

16. (D) 52

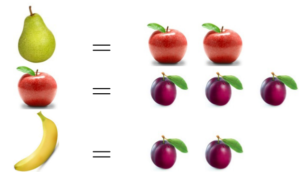


! Pasvarstykime, koks kvadratas yra dėžutės pagrindas. Kadangi prie 4 kvadrato kraštinių yra 20 kvadratėlių, tai prie vienos kraštinės tarsi bus 5 kvadratėliai, t.y. kvadratas tarsi bus 5×5. Bet jeigu nusipieštume kvadratą 5×5 (žr. pav.) ir suskaičiuotume kvadratėlius prie kraštinių, tai rastume tik 16 kvadratėlių, o ne 20. Taip yra todėl, kad nors prie vienos kraštinės yra 5 kvadratėliai, bet į bendrą visų kvadratėlių sumą kiekvienas iš 4 kampinių kvadratėlių įskaičiuojamas du kartus ($4 \times 5 - 4 = 16$). Dabar jau aišku, kad vienoje kraštinėje turi būti $(20 + 4) : 4 = 6$ kvadratėliai, t.y. dėžutės pagrindas yra kvadratas 6×6. Vadinasi, dėžutėje buvo $2 \cdot 36 = 72$ šokoladukai. Emilijai suvalgius jų 20, dėžutėje liko $72 - 20 = 52$ šokoladukai.

17. (E) 2 brolius ir 4 seseris

! Kadangi Kamilė turi 3 brolius ir 3 seseris, tai šeimoje yra 7 vaikai: 3 berniukai ir 4 mergaitės. Vienas iš berniuku yra Mikas, todėl jis turi 2 brolius ir 4 seseris.

18. (C) 18



! Žiūrint į sąlygos paveikslėlį, išradinėti nieko nebereikia. Už 6 kriaušes Adomas gali gauti $6 \cdot 2 = 12$ obuolių. Už 12 obuolių jis gali gauti $12 \cdot 3 = 36$ slyvas. Už 36 slyvas jis gali gauti $36 : 2 = 18$ bananų.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	B
3	A
4	D
5	B
6	D
7	C
8	B
9	E
10	C
11	D
12	B
13	D
14	E
15	C
16	D
17	E
18	C

Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Mažylis

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Mačys

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 3–4 klasių (*Mažylio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Mažylis, 3 klasė, 50 geriausiųjų

Milda Norkaitytė,	Ringaudų pradinė mokykla,	Kauno r.,	150,00
Rokas Varslauskas,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	150,00
Edita Paviliūnaitė,	Prano Mašioto pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	146,00
Nojus Stankevičius,	Sausio 13-osios mokykla,	Vilniaus m.,	145,00
Gabriele Marija Pratkute,	„Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	143,75
Ieva Marija Tubulytė,	Pradinė mokykla „Ruduo pavasaris“,	Vilniaus r.,	143,75
Rapolas Diržinauskas,	Ringaudų pradinė mokykla,	Kauno r.,	143,75
Elzė Amilevičiūtė,	Pradinė mokykla „Žiniukas“,	Vilniaus m.,	140,00
Guste Bajarkevičiūtė,	„Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	140,00
Kotryna Cibulskaitė,	Elektrėnų pradinė mokykla,	Elektrėnų sav.,	140,00
Alicija Jankovska,	Pradinė mokykla „Žiniukas“,	Vilniaus m.,	138,75
Gabrielė Vaičiukynaitė,	Ilgakiemio mokykla-darželis,	Kauno r.,	138,75
Dinas Abaturovas,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	137,50
Ernestas Pučinskas,	Ukmergės Dukstynos pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	137,50
Rokas Migauskas,	Marijampolės pradinė mokykla „Smalsutis“,	Marijampolės sav.,	137,50
Sandra Tulko,	Mokykla-darželis „Saulutė“,	Vilniaus m.,	137,50
Vytenis Narmontas,	Pradinė mokykla „Žiniukas“,	Vilniaus m.,	137,50
Raminta Šiaučiulytė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,00
Karolė Simona Motiejūnaitė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	136,25
Aurimas Jurkus,	Šeškinės pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	135,00
Beatričė Zelenkevičiūtė,	Girininkų pagrindinė mokykla,	Kauno r.,	133,75
Faustas Bastys,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	133,75
Liutauras Lelevičius,	„Varpelio“ pradinė mokykla,	Kauno m.,	133,75
Roman Kulikauskas,	Mokykla-darželis „Pakalnutė“,	Klaipėdos m.,	133,75
Ieva Bagdonavičiūtė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	132,50
Ieva Mockaitytė,	Prano Mašioto pradinė mokykla,	Kauno m.,	132,50
Laurynas Žukauskas,	Panevėžio Rožyno pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	132,50
Miglė Juršytė,	Ilgakiemio mokykla-darželis,	Kauno r.,	132,50
Milda Gečaitė,	Pradinė mokykla „Ruduo pavasaris“,	Vilniaus r.,	132,50
Šarūnas Logminas,	Sausio 13-osios mokykla,	Vilniaus m.,	132,50
Adomas Traubas,	„Žiburio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	131,25
Aleksej Chvorych,	„Atgimimo“ gimnazija,	Visagino sav.,	131,25
Augustinas Jarockis,	„Šaltinio“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	131,25
Aurimas Arlauskas,	Aukštadvario mokykla-darželis „Gandriukas“,	Trakų r.,	131,25
Domantas Stanys,	„Vėtrungės“ pradinė mokykla,	Kauno m.,	131,25
Hermis Dranevičius,	Pradinė mokykla „Ruduo pavasaris“,	Vilniaus r.,	131,25
Minijus Mikėnas,	Kurtuvėnų mokykla,	Šiaulių r.,	131,25
Rokas Baltrušaitis,	Prano Mašioto progimnazija,	Klaipėdos m.,	131,25
Vilius Stankevičius,	Mokykla-darželis „Varpelis“,	Klaipėdos m.,	131,25
Vilius Čerkesas,	Mokykla-darželis „Šilelis“,	Jonavos r.,	131,25
Emilija Lileikytė,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	131,00
Agata Kubarevič,	Kenos pagrindinė mokykla,	Vilniaus r.,	130,00
Julius Leonavičius,	Prano Mašioto pradinė mokykla,	Kauno m.,	130,00
Matas Lengvinas,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	130,00
Simonas Šidlauskas,	„Sakalėlio“ pradinė mokykla,	Alytaus m.,	130,00
Alanas Soročinskis,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	128,75
Austė Gečaitė,	Vydūno vidurinė mokykla,	Klaipėdos m.,	128,75
Edvinas Subočius,	Jono Pauliaus II progimnazija,	Vilniaus m.,	128,75
Greta Laužeckaitė,	Simono Daukanto vidurinė mokykla,	Kauno m.,	128,75
Saulė Janavičiūtė,	Hermano Zudermano gimnazija,	Klaipėdos m.,	128,75
Titas Labanov,	Vievio pradinė mokykla,	Elektrėnų sav.,	128,75

Mažylis, 4 klasė, 50 geriausiųjų

Eglė Gečaitė,	Vydūno pagrindinė mokykla,	Kauno m.,	150,00
Justas Komža,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	150,00
Natanas Nainys,	Šeškinės pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	146,25
Jonas Gipiškis,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	145,00
Mantas Kasčiūnas,	Vilniaus „Ąžuolyno“ progimnazija,	Vilniaus m.,	145,00
Ovidijus Točelis,	Merkinės Vinco Krėvės gimnazija,	Varėnos r.,	145,00
Eva Žilinskaitė,	Ringaudų pradinė mokykla,	Kauno r.,	143,75
Justina Masalskytė,	Grigiškių pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	143,75
Mantas Mačiūnas,	„Purienų“ vidurinė mokykla,	Kauno m.,	143,75
Neda Narmontaitė,	„Gilijos“ pradinė mokykla,	Klaipėdos m.,	143,75
Nikolė Gleizer,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	143,75
Šarūnė Valentinavičiūtė,	„Ąžuolo“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	143,75
Simonas Melaika,	„Saulėtekio“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	143,75
Vaiva-Marija Margytė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	143,75
Vilius Gečas,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	143,75
Rokas Burneika,	Ukmergės „Šilo“ pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	141,25
Justinas Turčak,	„Romuvos“ progimnazija,	Šiaulių m.,	140,00
Ieva Modgabytė,	Vitės pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m.,	138,75
Jonas Liutvinas,	Kuršėnų Daugėlių pagrindinė mokykla,	Šiaulių r.,	138,75
Julius Janeliūnas,	Pradinė mokykla „Žiniukas“,	Vilniaus m.,	138,75
Sofija Bagdonaitė,	Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m.,	138,75
Tomas Kvietkauskas,	„Vėtrungės“ pradinė mokykla,	Kauno m.,	138,75
Žiilvinas Aleksa,	Mokykla-darželis „Dainorėliai“,	Vilniaus m.,	138,75
Adomas Bagdonas,	Kaišiadorių Vaclovo Giržado progimnazija,	Kaišiadorių r.,	137,50
Dovydas Rutkauskas,	Kazlų Rūdos pradinė mokykla,	Kazlų Rūdos sav.,	137,50
Erika Kniūkštaitė,	Kovo 11-osios vidurinė mokykla,	Kauno m.,	137,50
Gertrūda Bazytė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Kamilė Miliškevičiūtė,	Pasvalio Lėvens pagrindinė mokykla,	Pasvalio r.,	137,50
Kastė Ivanauskaitė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Katarina Motylenko,	Lentvario 1-oji vidurinė mokykla,	Trakų r.,	137,50
Mantas Skyrius,	Pradinė mokykla „Žiniukas“,	Vilniaus m.,	137,50
Martynas Kulys,	Jeruzalės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Matas Sakalavičius,	Marijampolės pradinė mokykla „Smalsutis“,	Marijampolės sav.,	137,50
Miglė Mingilevičiūtė,	Šv. Kristoforo progimnazija,	Vilniaus m.,	137,50
Mija Pilkaitė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Mingailė Stančikaitė,	Kovo 11-osios vidurinė mokykla,	Kauno m.,	137,50
Naglis Kontautas,	Mokykla-darželis „Šaltinėlis“,	Klaipėdos m.,	137,50
Paulius Savickas,	Ukmergės Užupio pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	137,50
Ringaudas Mykolas Prialgauskas,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Rokas Petrauskas,	„Saulės“ privati gimnazija,	Vilniaus m.,	137,50
Rugilė Bieliauskaitė,	Kovo 11-osios vidurinė mokykla,	Kauno m.,	137,50
Rugilė Gudavičiūtė,	Kovo 11-osios vidurinė mokykla,	Kauno m.,	137,50
Vija Turulytė,	„Genio“ pradinė mokykla,	Vilniaus m.,	137,50
Viltė Brazauskaitė,	Kauno Juozo Naujalio muzikos gimnazija,	Kauno m.,	137,50
Žymantas Petreikis,	Plungės Adolfo Jucio pagrindinė mokykla,	Plungės r.,	137,50
Faustas Žiliajevas,	Žemynos progimnazija,	Vilniaus m.,	136,25
Arnas Kišūnas,	Rokiškio Senamiesčio progimnazija,	Rokiškio r.,	135,00
Kasparas Čiurlionis,	Fabijoniškių vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	135,00
Viktorija Gaitijatulina,	Mokykla-darželis „Vaivorykštė“,	Vilniaus m.,	135,00

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	7	☐	☐	☐	☐	☐	13	☐	☐	☐	☐	☐	19	☐	☐	☐	☐	☐	25	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	8	☐	☐	☐	☐	☐	14	☐	☐	☐	☐	☐	20	☐	☐	☐	☐	☐	26	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	9	☐	☐	☐	☐	☐	15	☐	☐	☐	☐	☐	21	☐	☐	☐	☐	☐	27	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	10	☐	☐	☐	☐	☐	16	☐	☐	☐	☐	☐	22	☐	☐	☐	☐	☐	28	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	11	☐	☐	☐	☐	☐	17	☐	☐	☐	☐	☐	23	☐	☐	☐	☐	☐	29	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	12	☐	☐	☐	☐	☐	18	☐	☐	☐	☐	☐	24	☐	☐	☐	☐	☐	30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

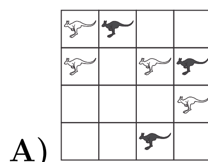
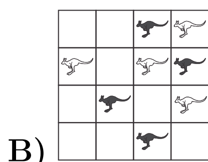
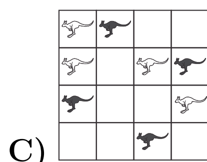
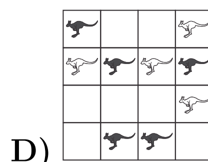
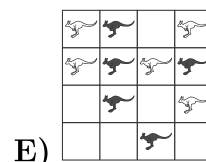
1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kuriame paveikslėlyje juodų kengūrų daugiau nei baltų?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

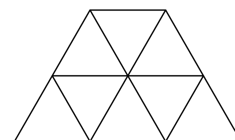
2. Alma teisingai atliko pratimą. Tada ji du vienodus skaitmenis užklijavo lipdukais:

$4\square + 5\square = 104$

Kokį skaitmenį slepia lipdukai?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

3. Tėvas kiekvienam iš savo trijų vaikų davė po 5 obuolius. Ona atidavė 3 obuolius Alei, o tada Alė pusę jos turimų obuolių atidavė Mikui. Kiek obuolių dabar turi Mikas?
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9



4. Kiek trikampių galima įžiūrėti paveikslėlyje?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

5. Kamilė turi 3 brolius ir 3 seseris. Kiek brolių ir seserų turi jos brolis Mikas?
A) 3 brolius ir 3 seseris **B)** 3 brolius ir 4 seseris **C)** 2 brolius ir 3 seseris
D) 3 brolius ir 2 seseris **E)** 2 brolius ir 4 seseris

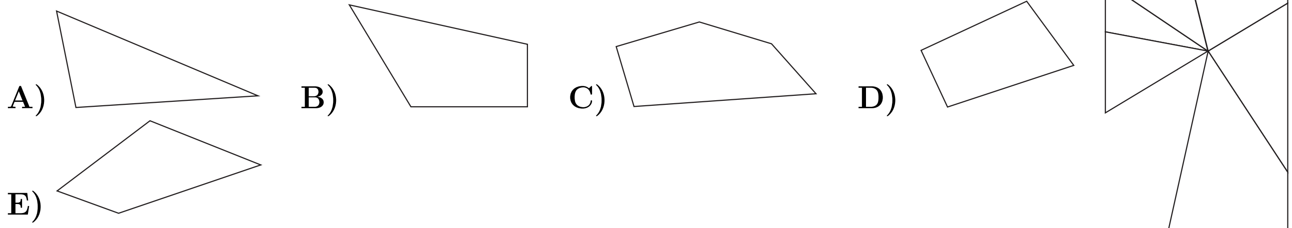
6. Dominykas turėjo 36 saldainius. Jis išdalijo tuos saldainius visiems savo draugams po lygiai. Kuris iš žemiau išvardytų skaičių negalėjo būti jo draugų skaičius?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

7. Veronikos mama daro dviejų duonos riekelių sumuštinius. Duonos pakelyje yra 24 riekelės. Kiek sumuštinių ji gali padaryti turėdama du su puse pakelio duonos?
A) 24 **B)** 30 **C)** 48 **D)** 34 **E)** 26

8. Penki berniukai kalbėjosi apie skaičių 325.
Andrius: „Tai 3-ženklis skaičius.“
Balys: „Visi jo skaitmenys yra skirtingi.“
Česlovas: „Skaitmenų suma lygi 10.“
Danielius: „Vienetų skaitmuo yra 5.“
Edmundas: „Visi skaitmenys yra nelyginiai.“
Kuris iš berniukų buvo neteisus?
A) Andrius **B)** Balys **C)** Česlovas **D)** Danielius **E)** Edmundas

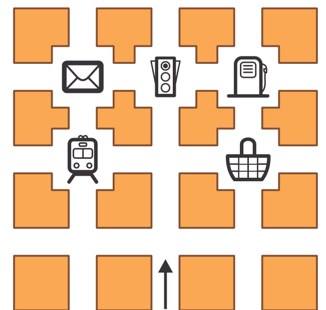
Klausimai po 4 taškus

9. Sudužo stačiakampis veidrodis. Kurio iš penkių gabalų trūksta paveikslėlyje?



10. Kai Pinokis meluoja, jo nosis pailgėja 6 centimetrais. Kai jis sako teisybę, jo nosis sutrumpėja 2 cm. Kai jo nosies ilgis buvo 9 cm, jis triskart sumelavo ir dukart pasakė teisybę. Koks pasidarė jo nosies ilgis?
A) 14 cm **B)** 15 cm **C)** 19 cm **D)** 23 cm **E)** 31 cm

11. Parduotuvėje parduoda apelsinus tik trijų dydžių dėžutėmis: su 5 apelsinais, su 9 apelsinais ir su 10 apelsinų. Mokytojas nupirko lygiai 48 apelsinus. Kiek mažiausiai dėžučių tai galėjo būti?
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

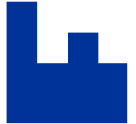


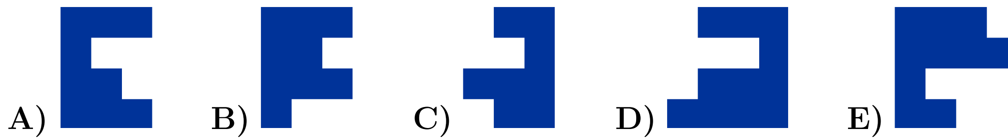
12. Agnė pradeda eiti rodyklės kryptimi. Kiekvienoje sankryžoje ji pasuka arba dešinėn, arba kairėn. Iš pradžių ji pasuko dešinėn, tada kairėn ir dar sykį kairėn, paskui vėl dešinėn ir dusyk kairėn. Kurioje sankryžoje atsidurs Agnė?
A) 🚆 **B)** ✉ **C)** 🚦 **D)** ⛽ **E)** 🧺

13. Bedraklasės Alė, Beta, Cilė ir Dalė yra gimusios tais pačiais metais. Jų gimtadieniai yra vasario 20-oji, balandžio 12-oji, gegužės 12-oji ir gegužės 25-oji (nebūtinai šia tvarka). Beta ir Alė gimė tą patį mėnesį. Alė ir Cilė gimė skirtingų mėnesių tą pačią dieną. Kuri iš jų yra vyriausia?
A) Alė **B)** Beta **C)** Cilė **D)** Dalė **E)** Nustatyti neįmanoma

14. 30 vaikų apsilankė miesto parke. 15 iš jų sukosi karusele, 20 iš jų suposi supynėmis. Kiek vaikų ir sukosi karusele, ir suposi supynėmis?
A) 25 **B)** 15 **C)** 30 **D)** 10 **E)** 5

15. Paveikslėlyje pavaizduota dėlionės detalė. Kurią iš žemiau išvardytų detalių galima pridėti prie pavaizduotosios, kad susidarytų stačiakampis?

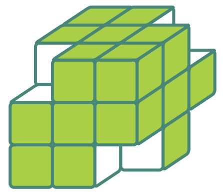


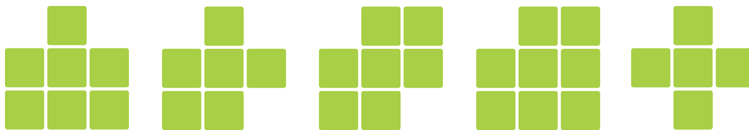


16. Skaičius 35 dalijasi iš savo paskutinio skaitmens, o skaičius 38 tokios savybės neturi. Kiek yra skaičių, didesnių už 21, bet mažesnių už 30, kurie dalijasi iš savo paskutinio skaitmens?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Klausimai po 5 taškus

17. Iš keturių kubo kampų Adelė išėmė po kubelį. Keli iš šių paveikslėlių vaizduoja kurią nors kubo sieną?



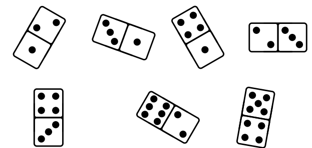


A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

18. Kiek metų turi praeiti nuo 2013 metų sausio 1-osios, kol pirmą sykį metų užrašo skaitmenų sandauga bus didesnė už tų skaitmenų sumą?
A) 87 **B)** 98 **C)** 101 **D)** 102 **E)** 103

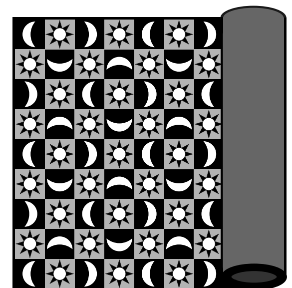
19. Gruodį katytė Micė miega lygiai 3 savaites. Kiek minučių tą mėnesį ji praleidžia nemiegodama?
A) $(31-7)\cdot 3\cdot 24\cdot 60$ **B)** $(31-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60$ **C)** $(30-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60$
D) $(31-7)\cdot 24\cdot 60$ **E)** $(31-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60\cdot 60$

20. Vytautas turi keletą domino kauliukų (žr. paveikslėlį). Jis deda juos į vieną eilę vieną šalia kito taip, kad dviejų gretimų kauliukų susiliečiantys kvadratai turėtų vienodai taškų. Kiek daugiausiai kauliukų jis gali sudėti į eilę?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

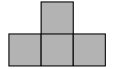


21. Kristė turi 7 stiklinius varpelius, kurių kainos yra 1 litas, 2 litai, 3 litai, 4 litai, 5 litai, 6 litai, 7 litai. Ji nusprendė varpelius sudėti į tris maišelius taip, kad maišelio kaina būtų ta pati. Keliais būdais ji tai gali padaryti?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Taip sudėti neįmanoma

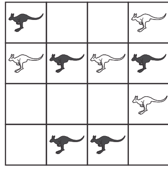
22. Petras pirko kilimą, kurio plotis 36 decimetrai, o ilgis 60 dm. Kilimo raštą sudaro kvadratai, kuriuose pakaitomis išausti arba saulė, arba mėnulis. Į kilimo plotį telpa 9 kvadratai (žr. pav.). Kiek mėnulių yra visame išvyniotame kilime?
A) 68 **B)** 67 **C)** 65 **D)** 63 **E)** 60



23. Mikė sudarinėja skaičius vien iš nulių ir vienetų. Kiek mažiausiai tokių skaičių užtenka Mikei sudėti, kad gautų sumą 2013?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 204

24. Beatričė turi daug vienodų kauliukų, tokių kaip pavaizduotas paveikslėlyje. Kiek mažiausiai kauliukų jai prireiks, kad galėtų sudėti kvadratą?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

Sprendimai

1. (D) 

! Paveikslėlyje **A** juodų kengūrų 3, baltų – 4. Paveikslėlyje **B** jų atitinkamai 4 ir 4, paveikslėlyje **C** – 4 ir 4, paveikslėlyje **D** – 5 ir 4, paveikslėlyje **E** – 5 ir 5. Taigi tik paveikslėlyje **D** juodų kengūrų daugiau.

2. (D) 7

! Visai paprasta patikrinti atsakymus. **A** netinka, nes $42 + 52 = 94$, o ne 104. **B** ir **C** netinka jau vien dėl to, kad sumos vienetų skaičius bus ne 4. **D** tinka: $47 + 57 = 104$. **E** vėl netinka, nes sumos vienetų skaičius būtų 6.

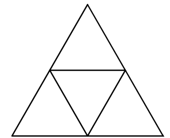
!! Iš salygos $4\square + 5\square = 104$, arba $40 + \square + 50 + \square = 104$. Tai reiškia, kad $\square + \square = 14$. Vadinasi, $\square = 7$.

3. (E) 9

! Kai Ona 3 obuolius atidavė Alei, Alė turėjo 8 obuolius. Pusę turimų obuolių, t.y. 4 obuolius, ji atidavė Mikui. Vadinasi, Mikas dabar turi $5 + 4 = 9$ obuolius.

4. (C) 10

! Mažųjų trikampių yra 8. Bet dar yra trikampių, sudėtų iš 4 trikampiukų (žr. pav.). Tokių trikampių yra 2, taigi iš viso paveikslėlyje galima įžiūrėti 10 trikampių.



5. (E) 2 brolius ir 4 seseris

! Kadangi Kamilė turi 3 brolius ir 3 seseris, tai šeimoje yra 7 vaikai: 3 berniukai ir 4 mergaitės. Vienas iš berniukų yra Mikas, todėl turi 2 brolius ir 4 seseris.

6. (D) 5

! Galima tiesiog tikrinti atsakymus. Jeigu draugų buvo 2, tai jie gavo po 18 saldainių. Jeigu draugų buvo 4 – tai po 9 saldainius, jei 6 – tai po 6 saldainius. Visa tai galėjo būti! O štai su 5 draugais nieko neišeina: jei jiems duotum po 7 saldainius, tai būtų išdalyti tik 35 saldainiai, ir vienas liktų. Jei duotum po 8 saldainius, tai prireiktų 40 saldainių, ir 4 saldainių pritrūktų. Taigi draugų negalėjo būti 5.

!! Žinoma, mokant dalyti, uždavinys visai aiškus. Skaičius 36 dalijasi iš 2, iš 3, iš 4, iš 6, bet iš 5 nesidalija. Vadinasi, draugų skaičius negalėjo būti 5.

7. Ⓑ 30

! Kadangi duonos pakelyje yra 24 riekės, tai dviejuose su puse pakelio bus $24 + 24 + 12 = 60$ riekelių duonos. Todėl galima padaryti 30 sumuštinių.

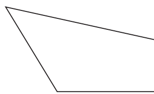
!! Galima skaičiuoti ir kitaip. Iš duonos pakelio (24 riekelės) galima padaryti 12 sumuštinių. Todėl iš pusės pakelio išeis 6 sumuštiniai. Taigi iš viso turėsime $12 + 12 + 6 = 30$ sumuštinių.

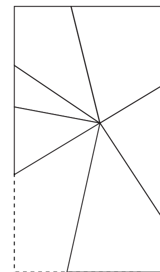
8. Ⓔ Edmundas

? Skaičius 325 yra triženklis, taigi Andrius teisus. Jo skaitmenys 3, 2 ir 5 skirtingi, taigi Balys teisus. Jo skaitmenų suma yra $3 + 2 + 5 = 10$, taigi Česlovas teisus. Jo vienetų skaitmuo, t.y. paskutinis skaitmuo, yra 5, taigi ir Danielius teisus.

Kadangi *Kengūros* konkurse teisingas tik vienas atsakymas, tai neteisus gali būti tik Edmundas.

! Iš tikrųjų čia visai nereikia nė Kengūros taisyklių. Jau patikrinome 4 teiginius – visi jie teisingi. Tikriname paskutinįjį – Edmundo teiginį: visi skaitmenys nelyginiai. Šis teiginys neteisingas – juk dešimčių skaitmuo 2 yra lyginis! Vadinasi, Edmundas neteisus.

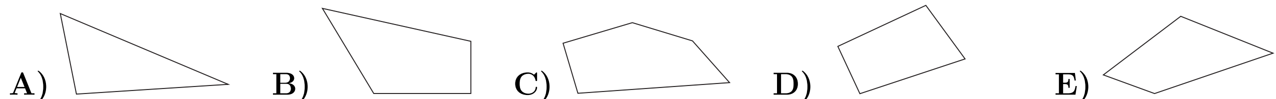
9. Ⓑ 



? Papildykime veidrodį. Matome, kad papildytoji dalis panaši į **B**.

! Dalyvaujant *Kengūros* konkurse, tokio samprotavimo visiškai užtenka – juk taškai duodami vien už teisingą atsakymą.

Vis dėlto, jei tai uždavinys ne *Kengūrai*, atsakymą reikia pagrįsti, t.y. įrodyti (paaiškinti), kodėl jis tinka, ir kodėl kiti atsakymai netinka. Parodysime, kaip tai daroma.



Papildytoji dalis yra keturkampė – todėl iš karto atmetame atsakymus **A** (ten šukė trikampė) ir **C** (šukė penkiakampė).

Šukė turi turėti labai smailų kampą – atkrenta atsakymas **D**. Liko dvi galimybės – **B** ir **E**. Bet šukė turi tik vieną smailų kampą – atkrenta ir atsakymas **E**. Lieka vienintelis atsakymas **B**.

Pastaba. Žinoma, samprotauti galima ir kitaip. Pavyzdžiui, pastebėkime, kad „papildytos“ šukės kraštinės eina viena kitai statmenai (kas žino, gali kalbėti ir apie statųjį kampą). Vadinasi, atsakymas **E** tikrai netinka.

10. (D) 23 cm

! Kai Pinokis 3 kartus sumelavo, jo nosis pailgėjo $3 \cdot 6 = 18$ centimetrais ir pasidarė $9 + 18 = 27$ centimetrų. Kai jis du kartus pasakė teisybę, nosis sutrumpėjo $2 \cdot 2 = 4$ centimetrais ir tapo $27 - 4 = 23$ centimetrų.

!! Žinoma, nosies ilgį galima rasti parašius reiškinį

$$9 + 6 + 6 + 6 - 2 - 2,$$

ir suskaičiavę gauname 23.

Beje, sąlygoje nepasakyta, kuria tvarka jis melavo ir sakė tiesą. Todėl sprendžiant verta pasirinkti paprasčiausią variantą, t.y. spręsti kuo paprastesnį uždavinį. Žinoma, čia atsakymas visiškai nepriklauso nuo melo ir teisybės sakymo tvarkos – reiškinyje veiksmų tvarką galima keisti.

11. (D) 5

? Teisingą atsakymą galima rasti taip. Iš pradžių tikriname mažiausią siūlomą dėžučių skaičių 4, t.y. atsakymą **E**. Jeigu įmanoma būtų 48 apelsinus nusipirkti 4 dėžutėmis, tai toks ir būtų *Kengūrai* tinkamas atsakymas: mažesni atsakymai mūsų nedomina.

Taigi ar galima 48 apelsinus parsinešti, pirkus 4 dėžutes? Aišku – ne: juk 4 dėžutėse gali būti daugiausiai $4 \cdot 10 = 40$ apelsinų.

Einame prie atsakymo **D**. Jeigu 5 dėžučių užtenka, tai ir būtų *Kengūros* atsakymas: 4 dėžučių neužtenka, o dar mažesnio jų skaičiaus *Kengūra* nesiūlo.

Į 5 dėžutes galima sudėti net $5 \cdot 10 = 50$ apelsinų. Bet mums reikia tik pilnų dėžučių ir lygiai 48 apelsinų. Kaip tai padaryti, matome iš karto: juk mums reikia apelsinų skaičių sumažinti 2 apelsinais. Pakeitę didžiąją 10 apelsinų dėžutę į vidutinę (9 apelsinų), apelsinų skaičių sumažinsime vienetu. Vadinasi, užtenka pakeisti 2 didžiąsias dėžutes į vidutines, ir turėsime $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 48$ apelsinus.

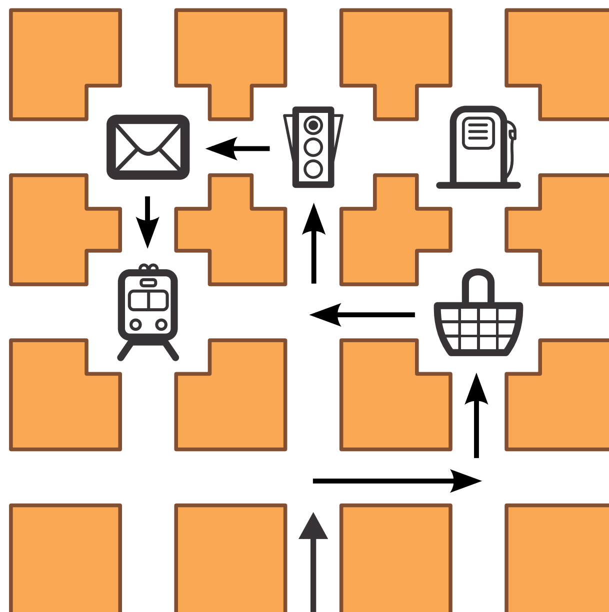
! Jau sakėme – kadangi ieškome mažiausio dėžučių skaičiaus, tai atsakymų **A**, **B** ir **C** nagrinėti nebereikia, nes ten nurodyti didesni už 5 dėžučių skaičiai.

Jei čia būtų ne Kengūriškas uždavinys, o tiesiog uždavinys be nurodytų atsakymų, tai sprendimas skirtųsi nedaug:

Keturių ar mažiau dėžučių neužtenka – jose būtų ne daugiau kaip $4 \cdot 10 = 40$ apelsinų. O štai 5 dėžučių gana: perkame 3 dėžutes po 10 apelsinų ir 2 dėžutes po 9 apelsinus: $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 48$.

12. (A)

! Nesunku nusipiešti Agnės kelią:



Vadinasi, ji pateko į sankryžą A.

13. (D) Dalė

! Kadangi Beta ir Alė gimė tą patį mėnesį, tai šis mėnuo yra gegužė (kitais mėnesiais gimtadienis tik vienas). Alė ir Cilė gimė tą pačią mėnesio dieną, todėl tai 12-oji (kitomis dienomis gimtadienių po vieną). Vadinasi, Alė gimė gegužės 12-ąją, todėl Beta kitą gegužės dieną – 25-ąją. Taigi Cilė gimė 12-ąją dieną ir ne gegužės mėnesį, – todėl balandžio 12-ąją. Dalei liko ketvirtoji data – vasario 20-oji. Kadangi ji ankstesnė už kitas, tai Dalė ir yra „vyriausia“.

14. (E) 5

? Nors tai ir nepasakyta, sąlygą reikia suprasti taip, kad kiekvienas iš vaikų arba suposi supynėmis, arba sukosi karusele, arba ir suposi ir sukosi (o ne tik žiopsojo).

Šį uždavinį galima spręsti labai įvairiai. Yra tik 15 vaikų, kurie sukosi karusele – tai tie, kurie tik sukosi karusele, ir tie, kurie tiek sukosi karusele, tiek ir suposi supynėmis. Vadinasi, suspėjusių pasilinksminti abejaip buvo ne daugiau kaip 15 – taigi tokių greituolių negalėjo būti 25 (atsakymas **A** netinka) ar 30 (atsakymas **C** netinka).

Tikriname atsakymą **B**. Jeigu greituolių buvo 15, tai tik supynėmis suposi 5 vaikai, o tik karusele sukosi $15 - 15 = 0$ vaikų. Kadangi visi vaikai – tai supęsi tik supynėmis, sukęsi tik karusele ir greituoliai, tai jų buvo $5 + 0 + 15 = 20$. Bet sąlygoje pasakyta, kad vaikų buvo 30. Vadinasi, su atsakymu **B** nieko neišeina (sakome: prieštara).

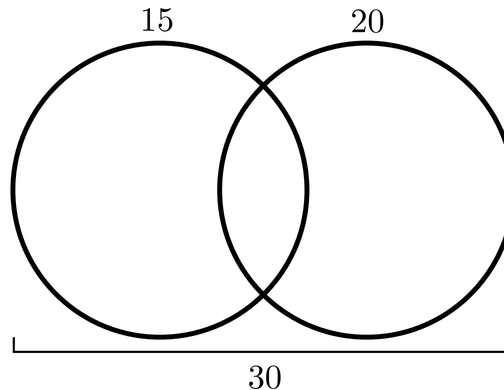
Imkime atsakymą **D**. Greituolių buvo 10, tik karusele sukosi $15 - 10 = 5$, tik supynėmis suposi $20 - 10 = 10$. Iš viso vaikų buvo $10 + 5 + 10 = 25$. Prieštara.

Liko atsakymas **E** – vadinasi tik jis *Kengūros* konkurse teisingas. O vis dėlto pasitikrinkime: greituolių buvo 5, tik karusele sukosi $15 - 5 = 10$, tik supynėmis suposi $20 - 5 = 15$. Iš viso vaikų buvo $5 + 10 + 15 = 30$. Šį kartą viskas gerai – jų ir turi būti 30.

! O gal galėjo greituolių būti dar kitas skaičius – ne 20, ne 15, 30, 10 ar 5? Tada ir uždavinio (nesiūlant 5 galimybių) atsakymas galėtų būti kitas (pavyzdžiui: 5 arba 7). Spręsti tokį uždavinį irgi galima tikrinant – tik tikrinti reikėtų visus atsakymus – 0, 1, 2, ..., 25, 26, 27, 28, 29, 30. Ir tai, kaip jau įsitikinome, paprasta.

Vis dėlto yra žymiai greitesnis būdas: kadangi 15 iš jų sukosi karusele, tai likusieji $30-15=15$ suposi tik supynėmis; kadangi 20 suposi supynėmis, tai $30-20=10$ sukosi tik karusele. Vadinasi, greituolių (ir pasisupusių ir pasisukusių) buvo $30-15-10=5$.

Tą patį būdą galima iliustruoti skrituliais.



Sakykime, kad pirmame skritulyje „sėdi“ sukęsieji karusele, antrame – supęsieji supynėmis, o bendroje skritulių srityje – greituoliai. Vadinasi kairėje (iš 3 sričių) sėdi tik sukęsi, dešinėje tik supęsi, o vidurinėje – greituoliai. Kairėje srityje yra $30-20=10$ vaikų, dešinėje $30-15=15$, taigi vidurinėje srityje yra $30-15-10=5$ vaikai.

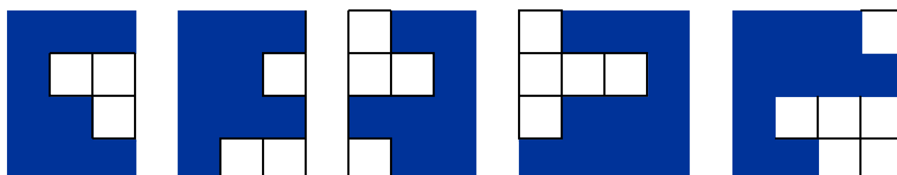
!! Galima ir įsivesti nežinomąjį. Sakykime, kad greituolių buvo G. Tada tik karusele sukosi $15-G$, o tik supynėmis suposi $20-G$ vaikų. Iš viso vaikų buvo $G+15-G+20-G$, t.y. $35-G$. Bet pagal sąlygą jų buvo 30, todėl $G=5$.

15. (B) 

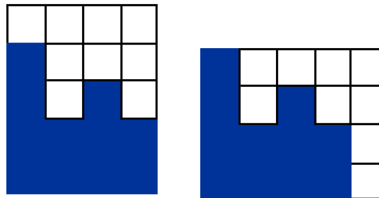
! Šiaip jau reikia geros vaizduotės, kad atspėtum atsakymą, ir daugelis išsprendusių šį uždavinį jį tiesiog atspėja.

Kaip spręsti uždavinį, jeigu vaizduotė nepadeda? Kadangi turi išeiti stačiakampis, tai iš pridedamosios detalės tikrai galima iškirpti gabalą (žr. pav.). Deja, jį galima iškirpti iš kiekvienos figūrų **A**–**F** ir ši mintis nepadeda.

Bandykime kitaip. Kadangi turi susidaryti stačiakampis, tai jis turi apglėbti paveikslėlyje gautą kvadratą 4×4. Vadinasi, nė vienas stačiakampio matmuo negali būti mažesnis už 4. Duotoji detalė sudaryta iš $4\times 4-5=11$ kvadratėlių. Suskaičiuokime, kiek kvadratėlių turi siūlomi pavyzdžiai.



Papildžius jas iki stačiakampių, pasidaro akivaizdu, kad **A** susideda iš $3\times4-3=9$ kvadratėlių, **B** – iš $3\times4-3=9$ kvadratėlių, **C** – iš $3\times4-4=8$ kvadratėlių, **D** iš $4\times4-5=11$ kvadratėlių, **E** – iš $4\times4-6=10$ kvadratėlių. Pridėjus jas prie duotosios detalės, ir sudarius stačiakampį, šis turėtų turėti atitinkamai $11+9=20$, $11+9=20$, $11+8=19$, $11+11=22$, $11+10=21$ detalę. Bet stačiakampis, kurio plotas 21, gali būti tik 1×21 ir 3×7 – vienas matmuo per mažas (mažesnis už 4). Panašiai $22=1\times22$ arba $22=2\times11$, ir vėl vienas matmuo per mažas. Tas pats su $19=1\times19$. Taigi lieka atvejai **A** ir **B**: $20=1\times20=20\times1=4\times5$. Papildome duotąją detalę iki stačiakampio 4×5:



Kairiajame paveikslėlyje atpažįstame pridėtą detalę **B**.

16. (B) 3

! Vargu ar čia sugalvosi ką kita – tiesiog tikriname skaičius nuo 22 iki 29.

22 iš 2 dalijasi, 23 iš 3 nesidalija, 24 iš 4 dalijasi,

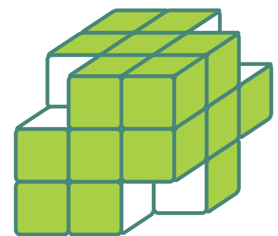
25 iš 5 dalijasi, 26 iš 6 nesidalija, 27 iš 7 nesidalija,

28 iš 8 nesidalija, 29 iš 9 nesidalija.

Taigi iš minėtų skaičių tik trys – 22, 24 ir 25 dalijasi iš savo paskutiniojo skaimens.

17. (D) 4

! Kubo priekinėje sienoje trūksta dviejų kubelių, dešiniojoje sienoje – 3 kubelių, užpakalinėje – 2, kairiojoje – 1, viršutinėje – 2, apatinėje – 2 kubelių.





Nesunku suvokti, kad I paveikslėlyje pavaizduota apatinė siena (jei žiūrėtume gulėdami po kubeliu galva į dešinę), II paveikslėlyje – dešinioji siena (jei kabėtume dešinėje galva žemyn), III paveikslėlyje – priekinė siena, IV paveikslėlyje – kairioji siena (tik į ją reikėtų žiūrėti iš kubelio vidaus). V paveikslėlis nevaizduoja jokios sienos – juk nė vienoje sienoje netrūksta 4 kubelių, kaip kad paveikslėlyje. Vadinasi, kubo sienas vaizduoja 4 paveikslėliai.

!! Galima įsivaizduoti, kad kubas stovi ant stalo ir jį sukiojame arba vartome tol, kol norimą vaizdą gauname priekinėje kubo sienoje.

Kad gautume I paveikslėlį, kubą verčiame per užpakalinę (pagrindo) briauną (t.y. nuo savęs). Priekine siena taps



ir užtenka kubą paversti į kairę (per kairiąją briauną), kad abiejų kvadratėlių trūktų viršutiniuose kvadrato kampuose.

Kad gautume II paveikslėlį, dešiniąją sieną pasukame į save, ir buvusi dešinioji siena taps priekine. Netgi nesvarbu, kokia trūkstamų tarp trijų kvadratėlių padėtis – kubą galima versti į kairę (arba į dešinę) tol, kol nebetrūks kairiojo apatinio kvadratėlio.

III paveikslėlį jau matome (žiūrėdami į priekinę kubo sieną).

IV paveikslėlį gausime atsukę kubo kairiąją sieną į save, o tada versdami kubą į kairę (ar į dešinę) tol, kol trūkstamas kvadratėlis taps kairiuoju viršutiniu.

18. (D) 102

? Patikriname atsakymus.

A) $2013 + 87 = 2100$, skaitmenų sandauga 0, suma 3;

B) $2013 + 98 = 2111$, skaitmenų sandauga 2, suma 5;

C) $2013 + 101 = 2114$, skaitmenų sandauga 8, suma 8;

D) $2013 + 102 = 2115$, skaitmenų sandauga 10, suma 9;

Jau galime rinktis atsakymą **D**: nors po 103 metų (t.y. 2116 metais) skaitmenų sandauga 12 didesnė už jų sumą 10, bet tai jau įvyksta nebe pirmą sykį.

! Įdomiau būtų spręsti, jeigu atsakymai nebūtų siūlomi.

Skaičiaus 2013 skaitmenų sandauga lygi 0. Ir iš viso, jeigu skaičius turi skaitmenį 0, tai skaitmenų sandauga (0) negali būti didesnė už skaitmenų sumą.

Visi skaičiai nuo 2013 iki 2099 turi antrą skaitmenį 0. Sekančio skaičiaus 2100 antras skaitmuo jau ne 0, bet nuo 2100 iki 2109 trečias skaitmuo 0. Sekantis skaičius 2110 taip pat dar turi nulį. Pagaliau, 2111 nulio jau neturi, bet skaitmenų sandauga 2 mažesnė už sumą 5. Skaičiaus 2112 skaitmenų sandauga (4) taip pat mažesnė už jų sumą (6), tas pat su skaičiumi 2113,– sandauga 6, suma 7. Pagaliau skaičiaus 2114 skaitmenų sandauga 8 bent jau lygi jų sumai (taip pat 8). O štai skaičius 2115 – pirmas po 2013, kurio skaitmenų sandauga (10) didesnė už sumą (9). Kadangi $2115 - 2013 = 102$, tai nuo 2013 metų turi praeiti 102 metai, kol skaitmenų sandauga taps didesnė už jų sumą.

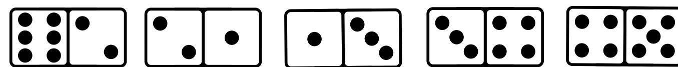
19. (**B**) $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24 \cdot 60$

? Gruodį Micė miega 3 savaites, t.y. $7 \cdot 3$ dienas. Likusiomis gruodžio dienomis, kurių yra $31 - 7 \cdot 3$, ji nemiega. Tai sudaro $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24$ valandų, t.y. $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24 \cdot 60$ minučių. Tiek duoda atsakymas **B**.

! O gal dar kuris rezultatas teisingas? Atsakymas **A** per didelis: jis didesnis už atsakymą **B**, nes $(31 - 7) \cdot 3$ yra daugiau už $31 - 7 \cdot 3$. Atsakymas **C** per mažas, nes $30 - 7 \cdot 3$ mažiau už $31 - 7 \cdot 3$. Atsakymas **D** per didelis, nes $31 - 7$ daugiau už $31 - 7 \cdot 3$. Pagaliau **E** taip pat aiškiai didesnis (60 kartų) už **B**.

20. (**C**) 5

? Keletą kartų pabandę sudedame net 5 kauliukus į eilę:



Šešių kauliukų sudėti niekaip nepavyksta. Renkamės atsakymą **C**.

! Šį kartą sprendimas **?** mūsų visai netenkina – gal mes tiesiog nerandame, kaip sudėti bent 6 kauliukus į eilę. Paaiškinsime, kodėl vis dėlto sudėti 6 kauliukus neįmanoma.

Įsivaizduokite, kad jau sudėjome 6 kauliukus. Tarp jų yra 6 tarpai, o šalia kiekvieno tarpo turi būti vienodi akučių skaičiai. Kauliukuose yra 3 vienetai – iš jų galima sudaryti daugiausia 1 porą. Yra 3 dvejetai – antra pora. Yra 3 trejetai – trečia pora. Yra 3 ketvertai – ketvirta pora. Yra tik 1 penketas ir 1 šešetas – jie porų nebesudaro. Porų daugiau nebėra, o turėjo būti 5 poros. Prieštara.

21. (**E**) Taip sudėti neįmanoma

? Norint pasiekti, kad maišeliai turėtų tą pačią kainą, natūralu iš karto nustatyti, kokia ji bus. Visi varpeliai kainuoja $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ litus. Bet 28 iš 3 nesidalija, todėl padaryti maišelių kainą vienoda nepavyks.

22. (**A**) 68

! Į kilimo plotį (36 dm) telpa 9 kvadratai, taigi kvadrato kraštinė lygi $36 : 9 = 4$ dm. Pirmame kvadratų stulpelyje matome 4 saules ir 5 mėnulius. Antrame yra 5 saulės ir 4 mėnuliai. Matome, kad trečiame (ir visuose nelyginiuose stulpeliuose) yra 4 saulės ir 5 mėnuliai, o visuose lyginiuose stulpeliuose – 5 saulės ir 4 mėnuliai.

Išvyniotame kilime bus $60 : 5 = 15$ stulpelių. Iš jų 8 bus nelyginiai (pirmas, trečias, ... , penkioliktas) ir 7 lyginiai (antras, ketvirtas, ... , keturioliktas).

Vadinasi, nelyginiuose stulpeliuose bus $8 \cdot 5 = 40$ mėnulių, o lyginiuose $7 \cdot 4 = 28$ mėnuliai, iš viso 68 mėnuliai.

!! Skaičiuoti galima ir kitaip. Kadangi kvadrato kraštinė lygi $36 : 9 = 4$ dm, tai yra 15 stulpelių, o iš viso $9 \cdot 15 = 135$ kvadratai. Juostoje, kurią sudaro du gretimi stulpeliai, yra lygiai saulių ir mėnulių (po 9). Atmeskime 14 paskutinių stulpelių, t.y. 7 juostas – juose saulių ir mėnulių yra po lygiai. Likusiame pirmame stulpelyje mėnulių yra vienu daugiau, taigi ir visuose 135 kvadratų mėnulių yra 1 daugiau. Atmetus tą 1 mėnulį, saulių ir mėnulių bus po lygiai, t.y. $(135 - 1) : 2 = 67$. Vėl pridėję tą mėnulį, jų gausime 68.

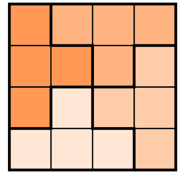
23. (**B**) 3

! Kadangi reikia imti kuo mažiau skaičių, tai natūralu vieną jų imti kuo didesnį – taigi keturženklį. Bet sumos antras skaitmuo 0, taigi pirmą skaičių imame 1011. Lieka dar paimti kuo mažiau skaičių, kad jų suma būtų $2013 - 1011 = 1002$. Dabar natūralu imti 1001, ir liks 1. Todėl trijų skaičių užtenka:

$$2013 = 1011 + 1001 + 1.$$

Liko paaiškinti (= įrodyti), kad mažiau skaičių sumai 2013 gauti neužteks. Galvokime apie vienetų skaitmenį 3 – jam dviejų skaičių tikrai neužtenka. Vadinasi, mažiausias dėmenų skačius – trys.

24. (**B**) 4



? Įsitikiname, kad nupiešti kvadratą, sudėtą iš 2 ar 3 kauliukų neįmanoma. Nupiešti kvadratą sudarytą iš 4 kauliukų, įmanoma (žr. pav.). Renkamės atsakymą **B**.

! Nors tai tarsi ir akivaizdu, kad mažiau kaip 4 kauliukų neužteks, verta tai pagrįsti.

Imkime 2 kauliukus, juose 8 kvadratėliai. O kvadrate gali būti tik $a \cdot a$ kvadratėlių, kur a – kraštinės ilgis kvadratėliais, t.y. $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, $5 \cdot 5 = 25$, ir t.t. Vadinasi, negalima sudėti kvadrato ir iš 3 kauliukų, nes juose yra 12 kvadratėlių.

Beje, tikrai negalima kvadrato sudėti iš 5 kauliukų, nes juose 20 kvadratėlių, ir iš 6 kauliukų, nes juose 24 kvadratėliai. Taigi lieka du atsakymai **B** (4 kauliukai) ir **E** (9 kauliukai), kai sunkiau pasakyti, galima ar negalima sudėti iš tiek kauliukų.

Jau matėme, kad galima nupiešti kvadratą, sudėtą iš 4 kauliukų, o iš mažiau kauliukų to padaryti negalima. Taigi 4 yra mažiausias kauliukų skaičius.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	D
3	E
4	C
5	E
6	D
7	B
8	E
9	B
10	D
11	D
12	A
13	D
14	E
15	B
16	B
17	D
18	D
19	B
20	C
21	E
22	A
23	B
24	B

Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Bičiulis

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Šarka

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 5–6 klasių (*Bičiulio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Bičiulis, 5 klasė, 50 geriausiųjų

Ernestas Ramanauskas,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m.,	150,00
Juozapas Ivanauskas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	133,75
Tadas Virbickas,	Jeruzalės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	132,50
Jonas Gajdosihas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	131,25
Benas Ranauskas,	Šilutės Martyno Jankaus pagrindinė mokykla,	Šilutės r.,	127,50
Matas Remeika,	„Vilnies“ pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	126,25
Robert Kovalevski,	Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	126,25
Dominykas Marma,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	125,00
Joris Gagilas,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	125,00
Ernestas Liekis,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m.,	123,75
Emilija Palivonaitė,	Mikalojaus Daukšos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	122,50
Agnė Gudauskaitė,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav.,	121,25
Arnas Vyšniauskas,	Žemynos progimnazija,	Vilniaus m.,	121,25
Gabrielė Jonauskaitė,	Simono Stanevičiaus vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	121,25
Mantas Liagas,	Skriaudžių pagrindinė mokykla,	Prienų r.,	119,75
Vincas Turskis,	KTU Vaižganto progimnazija,	Kauno m.,	118,75
Juozapas Rokas Čypas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	118,50
Aneta Jaglinska,	Simono Konarskio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	117,50
Tadas Laiškonis,	„Ąžuolo“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	116,25
Dominika Uvarova,	Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	115,00
Tadas Šopis,	Vaškų vidurinė mokykla,	Pasvalio r.,	115,00
Juozas Murinas,	Panevėžio Rožyno pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	112,50
Martynas Aušrota,	Kazlų Rūdos pagrindinė mokykla,	Kazlų Rūdos sav.,	112,50
Simonas Druskis,	Emilijos Pliaterytės progimnazija,	Vilniaus m.,	112,25
Andrius Pečiulis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	111,25
Ingrida Pliaterytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	111,25
Joris Benjaminas Rimkevičius,	Seredžiaus S. Šimkaus pagrindinė mokykla,	Jurbarko r.,	111,25
Lukrecija Parnarauskaitė,	Širvintų „Atžalyno“ progimnazija,	Širvintų r.,	111,25
Benas Simanavičius,	„Vilties“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	111,00
Viktorija Kuldoš,	Šalčininkų Lietuvos tūkstantmečio gimnazija,	Šalčininkų r.,	110,00
Redas Ališauskas,	Ukmergės „Šilo“ pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	109,75
Marius Davidavičius,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	108,75
Matas Zinkevičius,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	108,75
Kotryna Jankauskaitė,	Marijampolės „Ryto“ pagrindinė mokykla,	Marijampolės sav.,	108,50
Rapolas Lisonka,	Jonavos Justino Vareikio pagrindinė mokykla,	Jonavos r.,	108,50
Donata Snieškaitė,	„Vilties“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	107,50
Simonas Burkovskis,	Šv. Kristoforo progimnazija,	Vilniaus m.,	107,50
Matas Urbonas,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	106,25
Vitalij Fokin,	„Pajūrio“ pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m.,	106,25
Adomas Sidaravičius,	KTU Vaižganto progimnazija,	Kauno m.,	105,00
Daniil Strelan,	Sofijos Kovalevskajos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	105,00
Andrėja Juškaitė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	104,50
Simas Kontrimas,	Mažeikių Senamiesčio pagrindinė mokykla,	Mažeikių r.,	104,50
Martynas Strazdas,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	103,75
Petras Lapukas,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	103,75
Tomas Lugauskas,	Daugų Vlado Mirono gimnazija,	Alytaus r.,	103,75
Meda Grondskytė,	Juozo Grušo meno vidurinė mokykla,	Kauno m.,	103,25
Beatričė Malinauskaitė,	Kazimiero Paltaroko gimnazija,	Panevėžio m.,	102,50
Rokas Urbonas,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	102,50
Rokas Bložaitis,	Eržvilko gimnazija,	Jurbarko r.,	102,50

Bičiulis, 6 klasė, 50 geriausiųjų

Ainas Beinakaraitis,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav.,	150,00
Tomas Ervinas Trusovas,	Šolomo Aleichemo gimnazija,	Vilniaus m.,	146,25
Julija Paliulionytė,	Martyno Mažvydo progimnazija,	Vilniaus m.,	145,00
Tomas Šveikauskis,	„Ryto“ vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	143,75
Ugnė Alaburdaitė,	Prienų „Revuonos“ vidurinė mokykla,	Prienų r.,	138,75
Dovydas Kaunietis,	Pilėnų vidurinė mokykla,	Kauno m.,	137,50
Mindaugas Parnarauskas,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	131,25
Augustas Mačijauskas,	„Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	130,00
Medardas Meškuotis,	Ukmergės Dukstynos pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	130,00
Aidas Jonynas,	Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija,	Kauno r.,	126,25
Audrius Mardosas,	Zarasų Pauliaus Širvio progimnazija,	Zarasų r.,	123,75
Justė Zdobaitė,	Vilniaus „Ąžuolyno“ progimnazija,	Vilniaus m.,	123,75
Milda Navickaitė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	123,75
Ričardas Navickas,	„Romuvos“ progimnazija,	Šiaulių m.,	123,75
Domantas Stanionis,	Jono Basanavičiaus gimnazija,	Kauno m.,	122,50
Nojus Pakėnas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	122,50
Ignas Jakštas,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	121,25
Katažyna Jankovska,	Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	121,25
Ignas Valatka,	Gedminų pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m.,	118,75
Vilius Jaskelevičius,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	118,75
Luknė Kraujelytė,	Molėtų pagrindinė mokykla,	Molėtų r.,	118,50
Andrius Zmejevskis,	Trakų Vytauto Didžiojo gimnazija,	Trakų r.,	117,50
Gabrielius Baltrūnas,	Rokiškio Juozo Tūbelio progimnazija,	Rokiškio r.,	117,50
Gediminas Lelešius,	Kaišiadorių Vaclovo Giržado progimnazija,	Kaišiadorių r.,	117,50
Kipras Stulginskas,	Tuskulėnų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	117,50
Mantas Auruškėvičius,	Jono Basanavičiaus progimnazija,	Vilniaus m.,	117,50
Andrius Pukšta,	Šv. Kristoforo progimnazija,	Vilniaus m.,	117,25
Lukas Dundulis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	117,25
Airidas Kutra,	Kėdainių „Aušros“ mokykla,	Kėdainių r.,	116,25
Greta Gataveckaitė,	„Volungės“ pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	116,25
Ugnius Kleiba,	Eduardo Balsio menų gimnazija,	Klaipėdos m.,	116,25
Gabija Lesauskaitė,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	116,00
Marius Jasiūnas,	Jurbarko Naujamiesčio vidurinė mokykla,	Jurbarko r.,	115,75
Goda Globytė,	Raseinių Šaltinio pagrindinė mokykla,	Raseinių r.,	115,00
Julijus Rancevas,	Vilniaus tarptautinė Meridiano mokykla,	Vilniaus m.,	115,00
Kasparas Jankevičius,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	115,00
Naglis Pilkionis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	115,00
Tautvydas Jasiūnas,	Kamajų Antano Strazdo gimnazija,	Rokiškio r.,	115,00
Tomas Genčauskis,	Gegužių progimnazija,	Šiaulių m.,	115,00
Justinas Skurkis,	„Žiburio“ vidurinė mokykla,	Kauno m.,	114,75
Damian Michalczonok,	Juzefo Ignacijaus Kraševskio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	113,75
Domas Sakavičius,	Dainavos pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	113,75
Ignas Kiudulas,	Jono Basanavičiaus progimnazija,	Vilniaus m.,	113,75
Laura Pučkoriūtė,	Mažvydo progimnazija,	Klaipėdos m.,	113,75
Simonas Babilius,	Vilniaus Antakalnio progimnazija,	Vilniaus m.,	113,75
Titas Jukšta,	Salduvės progimnazija,	Šiaulių m.,	113,75
Darius Staugas,	Grigiškių „Šviesos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	112,50
Deividas Vicinskis,	„Ateities“ vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	112,50
Edvinas Juozapaitis,	Naujosios Akmenės „Saulėtekio“ progimnazija,	Akmenės r.,	112,50
Gustė Paškevičiutė,	„Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	112,50
Nedas Našlėnas,	Kėdainių „Ryto“ pagrindinė mokykla,	Kėdainių r.,	112,50
Urtė Širmulytė,	Raudondvario gimnazija,	Kauno r.,	112,50

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
Klasė	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

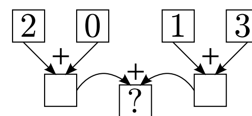
	A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐
17	☐	☐	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐
22	☐	☐	☐	☐	☐
23	☐	☐	☐	☐	☐
24	☐	☐	☐	☐	☐
25	☐	☐	☐	☐	☐
26	☐	☐	☐	☐	☐
27	☐	☐	☐	☐	☐
28	☐	☐	☐	☐	☐
29	☐	☐	☐	☐	☐
30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

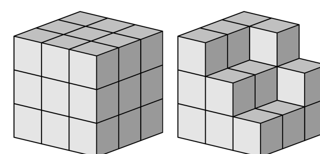
1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

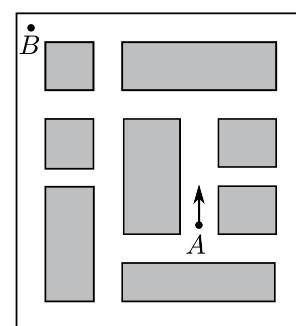


1. Į sumavimo mašiną (žr. pav.) įdedame skaičius 2, 0, 1, 3. Kokį rezultatą gausime klaustuku pažymėtame kvadratėlyje?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6



2. Natalija nori sudėti kairiajame paveikslėlyje pavaizduotą kubą. Deja, jai pritrūko mažųjų kubelių, ir pavyko sudėti tik kubo dalį, pavaizduotą dešiniajame paveikslėlyje. Kiek kubelių trūksta Natalijai, kad pabaigtų dėti kubą?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

3. Vaikai išėjo pasivaikščioti. Kol Martynas padaro 9 žingsnius, Dovydas padaro 8, o Paulius– 7. Martynas per minutę padaro 90 žingsnių. Kiek žingsnių padarys visi vaikai kartu per 10 minučių truksiantį pasivaikščiojimą?
A) 240 **B)** 2013 **C)** 2400 **D)** 2700 **E)** 900



4. Tomas mokosi vairuoti. Jis jau sugeba pasukti į dešinę, bet dar nemoka pasukti į kairę. Kiek mažiausiai posūkių jis turės padaryti, norėdamas iš taško A patekti į tašką B, pradėjęs važiuoti nurodyta kryptimi (žr. pav.)?
A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

5. Artūro, Ramūno ir Pauliaus amžių suma yra 31 metai. Kokia bus jų amžių suma po trejų metų?
A) 32 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 37 **E)** 40

6. Kokius vienodus skaitmenis reikia įrašyti į visus tris reiškinio $\square\square \cdot \square = 176$ langelius, kad daugybos veiksmas būtų atliktas teisingai?
A) 6 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 8

7. Autobusai iš stotelės išvažiuoja kas 15 minučių. Pirmas autobusas iš stotelės išvažiavo 11:05. Kada išvažiuos ketvirtas?
A) 11:40 **B)** 11:50 **C)** 11:55 **D)** 12:00 **E)** 12:05

8. Vieną popietę Onutė praleido važiuodama dviračiu. Ji važiavo pastoviu greičiu, o jai pradedant ir baigiant pasivažinėjimą rankinio laikrodžio rodyklės buvo pavaizduotose padėtyse:

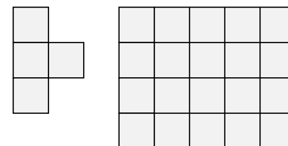


Kokioje padėtyje buvo laikrodžio minutinė rodyklė, kai Onutė buvo nuvažiavusi trečdalį kelio?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

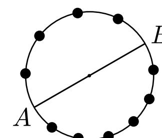
9. Skaičius 36 dalijasi iš savo paskutiniojo skaitmens (lygaus 6), o skaičius 38 iš savo paskutiniojo skaitmens (lygaus 8) nesidalija. Kiek yra skaičių, didesnių už 20 ir mažesnių už 30, kurie dalijasi iš savo paskutiniojo skaitmens?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10. Evita turi daug tokių detalių, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Ji bando kiek įmanoma daugiau jų sudėti į stačiakampį 4×5. Detalės negali dengti viena kitos. Kiek daugiausia detalių Evita gali sudėti į stačiakampį?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

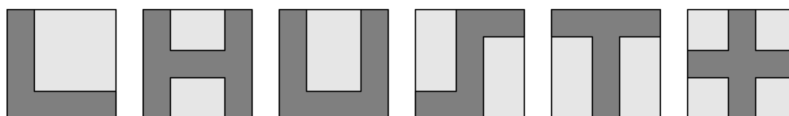


Klausimai po 4 taškus

11. Apskritime pažymėta 10 taškų (žr. pav.). Kiek galima nubrėžti atkarpų, jungiančių du pažymėtus taškus ir nekertančių skersmens AB?
A) 10 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 25 **E)** 15



12. Marytė ant kvadratinių popieriaus lapų nupiešė šešias pavaizduotas figūras. Kelių iš nupieštų figūrų perimetras yra toks pat, kaip ir kvadratinio lapo, ant kurio figūros buvo piešiamos?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

13. Jonas iš kubelių sudėjo statinį. Paveikslėlyje greta pavaizduotas statinio vaizdas iš viršaus. Ant kiekvieno viršutinio kubelio užrašytasis skaičius nurodo, kelių kubelių aukščio yra atitinkamas bokštas. Kokį vaizdą matys Jonas, žiūrėdamas į statinį?

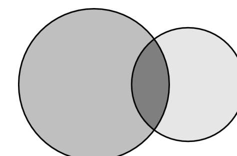
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

Jonas

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

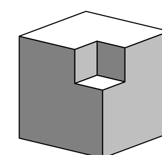
14. Žvejys Matas apžiūrinėja laimikį. Jei jis būtų pagavęs tris kartus daugiau žuvų, tai turėtų dvylika žuvų daugiau nei turi. Kiek žuvų pagavo Matas?
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

15. Nubrėžęs du apskritimus, Mikas gavo figūrą, susidedančią iš trijų dalių (žr. pav.). Iš kiek daugiausia dalių susidedančią figūrą gali gauti Mikas, nubrėžęs du kvadratus?
A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9



16. Rinkimuose dalyvavo penki kandidatai ir balsavo 36 žmonės. Visi penki kandidatai gavo po skirtingą balsų skaičių. Laimėtojas gavo 12 balsų, o paskutinėje vietoje likęs gavo 4 balsus. Kiek balsų galėjo gauti antrą vietą užėmęs kandidatas?
A) Tik 8 **B)** 8 arba 9 **C)** Tik 9 **D)** 9 arba 10 **E)** Tik 10

17. Medinio kubo briaunos ilgis lygus 3. Iš kubo kampo išpjovėme vieną kubelį, kurio kraštinės ilgis yra 1 (žr. paveikslėlį). Gauta detalė turi 9 sienas. Kiek sienų turėtų detalė, jei po tokį patį kubelį išpjautume iš kiekvieno kubo kampo?
A) 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36



18. Keliais būdais skaičių 50 galima užrašyti kaip dviejų dviženklių skaičių skirtumą?
A) 40 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 10

19. Ledo ritulio turnyro finale buvo gausu įvarčių. Per pirmąjį kėlinį iš viso buvo įmušti net 6 įvarčiai, ir jam pasibaigus pirmavo svečių komanda. Per antrąjį kėlinį namų komanda įmušė tris įvarčius ir išplėšė pergalę. Kiek iš viso įvarčių įmušė namų komanda?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

20. Į lentelės 4×4 langelius skaičiai surašyti taip, kad gretimuose (turinčiuose bendrą kraštinę) langeliuose esančių skaičių skirtumas lygus 1. Lentelės viršutiniame kairiajame langelyje yra įrašytas skaičius 3 (žr. pav.). Taip pat žinoma, kad kažkuriame kitame lentelės langelyje yra įrašytas skaičius 9. Kiek iš viso skirtingų skaičių yra lentelėje?

3			

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Klausimai po 5 taškus

21. Adas, Benas ir Domas visuomet meluoja. Kiekvienas iš jų turi arba raudoną, arba žalią akmenėlį. Adas sako: „Mano akmenėlis tokios pat spalvos kaip ir Beno“. Benas sako: „Mano akmenėlis tokios pat spalvos kaip ir Domo“. Domas sako: „Lygiai du iš mūsų turi po raudoną akmenėlį“. Kuris iš žemiau išvardytų teiginių yra teisingas?
A) Ado akmenėlis žalias **B)** Beno akmenėlis žalias **C)** Domo akmenėlis raudonas
D) Ado ir Domo akmenėliai skirtingų spalvų **E)** Teiginiai **A**–**D** klaidingi

22. Konkurse „Mis Katė 2013“ dalyvavo 66 katės. Po pirmojo etapo 21 katė iškrito, nes nesugebėjo pagauti pelės. Iš likusių kačių 27 buvo dryžuotos ir 32 turėjo vieną juodą ausį. Visos dryžuotos katės viena juoda ausimi galiausiai pateko į finalą. Koks mažiausias įmanomas finalo dalyvių skaičius?
A) 5 **B)** 7 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 27

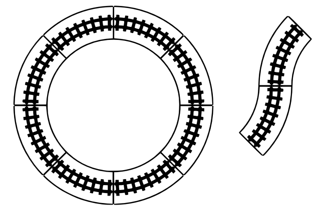
23. Ūla nusipirko šokolado plytelę ir grįžusi namo dalį jos suvalgė. Į svečius užsukusi Alė suvalgė ketvirtadalį likusios dalies. Kartu jos suvalgė pusę šokolado plytelės. Kokią dalį visos šokolado plytelės suvalgė Alė?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{12}$

24. Paveikslėlyje pavaizduoti keturi mygtukai – du linksmi ir du liūdni. Paspaudus mygtuką, jo nuotaika pasikeičia į priešingą (t.y. liūdnas mygtukas tampa linksmu ir atvirkščiai). Be to, į priešingą pasikeičia ir greta jo esančių mygtukų nuotaika. Kelių mažiausiai reikia paspaudimų, kad visi mygtukai taptų linksmi?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

25. 40 berniukų ir 28 mergaitės stovi ratu, susikibę už rankų. Lygiai 18 berniukų yra savo dešinę ranką padavę mergaitei. Keli berniukai yra padavę mergaitei savo kairę ranką?
A) 18 **B)** 9 **C)** 28 **D)** 14 **E)** 20

26. Kiek yra triženklių skaičių, iš kurių atėmę 297 gausime triženklį skaičių iš tų pačių skaitmenų kaip pradinis, tik surašytų atvirkščia tvarka?
A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 60 **E)** 70

27. Jurgis ir Jonas rado savo seną žaislinį geležinkelį. Jurgis iš karto sudėjo apskritimo formos kelią iš 8 geležinkelio dalių (žr. kairįjį paveikslėlį). Jonas nori sudėti kitokį kelią ir pradeda nuo sujungtų dviejų dalių (žr. dešinįjį paveikslėlį). Jis nori sudėti uždarą kelią ir panaudoti kuo mažiau dalių. Kelių dalių iš viso jam prireiks?



A) 11 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

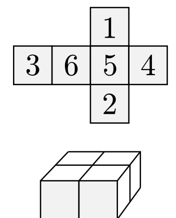
28. Saloje gyveno 2013 gyventojų. Kai kurie iš jų buvo tiesuoliai, o likę buvo melagiai. Tiesuoliai visuomet sakydavo tiesą, o melagiai visuomet meluodavo. Kiekvieną dieną vienas iš jų pasakydavo: „Po mano išvykimo tiesuolių ir melagių saloje liks po lygiai“, o tada išvykdavo. Po 2013 dienų saloje nebeliko nė vieno gyventojo. Kiek iš pradžių saloje gyveno melagių?

A) 0 **B)** 1006 **C)** 1007 **D)** 2013 **E)** Neįmanoma nustatyti

29. Sakoma, kad su skaičių trejetu atlikta operacija „SUMOS“, jei kiekvienas iš trijų skaičių pakeičiamas kitų dviejų suma (pavyzdžiui, skaičius $3, 4, 6$ operacija „SUMOS“ paverčia skaičiais $10, 9, 7$, o šiuos savo ruožtu – skaičiais $16, 17, 19$). Pradėkime nuo skaičių trejeto $20, 1, 3$ ir operaciją „SUMOS“ atlikime 2013 kartų iš eilės. Koks bus didžiausias skirtumas tarp dviejų gauto trejeto skaičių?

A) 1 **B)** 2 **C)** 17 **D)** 19 **E)** 2013

30. Kubelio sienos sunumeruotos taip, kaip pavaizduota jo išklotinėje. Iš 4 tokių vienodų kubelių Alisa suklijuoja stačiakampę plytelę, taip pat pavaizduotą paveikslėlyje. Ji vieną prie kitos klijuoja tik tas kubelių sienas, ant kurių užrašytas toks pat skaičius. Kokia didžiausia gali būti plytelės paviršiuje esančių skaičių suma?



A) 66 **B)** 68 **C)** 72 **D)** 74 **E)** 76

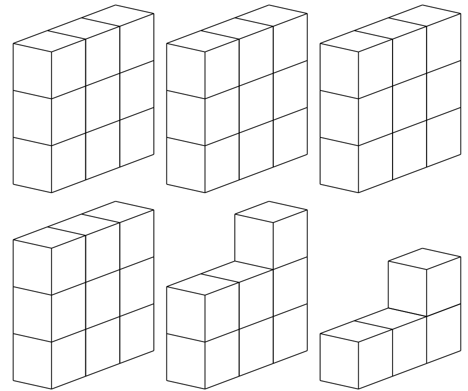
Sprendimai

1. Ⓔ 6

! Norint rasti, kokį rezultatą gausime kvadratėlyje, pažymėtame klaustuku, reikia prie pirmų dviejų skaičių sumos pridėti paskutinių dviejų skaičių sumą. Tai yra tas pats, kas susumuoti visus skaičius: $2 + 0 + 1 + 3 = 6$.

2. Ⓒ 7

! Norint išspręsti šį uždavinį, pakanka tiesiog suskaičiuoti, kelių kubelių trūksta. Tam, kad būtų lengviau skaičiuoti, galima duotus kubus įsivaizduoti taip, kaip pavaizduota paveikslėlyje: kairysis kubas susideda iš trijų sluoksnių po devynis kubelius, o Natalijos kubo dalis susideda iš vieno devynių kubelių sluoksnio, vieno 7 kubelių sluoksnio ir vieno 4 kubelių sluoksnio. Aišku, kad tuomet trūksta $0 + 2 + 5 = 7$ kubelių.

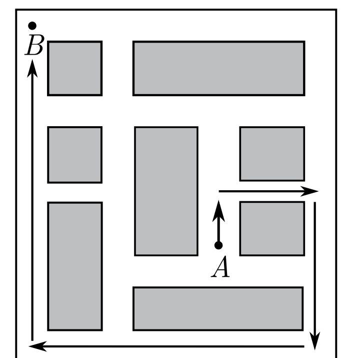


3. Ⓒ 2400

! Pirmiausia raskime, kiek žingsnių vaikai padarys per minutę. Žinome, kad Martynas per minutę padaro 90 žingsnių. Kiekvieniems 9 jo žingsniams tenka 8 Dovydo žingsniai, vadinasi, Dovydas per minutę padarys 80 žingsnių. Lygiai taip pat kiekvieniems 9 Martyno žingsniams tenka 7 Pauliaus žingsniai, tad Paulius per minutę padarys 70 žingsnių. Gavome, kad per minutę visi kartu jie padarys $70+80+90 = 240$ žingsnių, tad per 10 minučių padarys 10 kartų daugiau – 2400.

4. Ⓑ 4

! Pastebėkime, kad Tomas turės padaryti bent vieną posūkį, nes važiuodamas tiesiai į B nepateks. Padaręs pirmą posūkį į dešinę (nesvarbu kurioje sankryžoje) jis bus žemiau nei B, tad jam teks atlikti dar bent tris posūkius, kad pradėtų važiuoti į viršų. Kita vertus, keturių posūkių tikrai pakanka (žr. paveikslėlį).



5. Ⓔ 40

! Po trejų metų ir Artūras, ir Ramūnas, ir Paulius turės trejais metais daugiau. Vadinasi, kartu sudėjus jie turės devyneriais metais daugiau, o jų amžių suma bus lygi $31 + 9 = 40$.

6. Ⓑ 4

! Patikrinę randame, kad tinka skaitmuo 4: $44 \cdot 4 = 176$. Visi kiti netiks, nes su mažesniais skaitmenimis gausime mažesnę sandaugą, o su didesniais – didesnę.

7. Ⓑ 11:50

! Tiesiog suskaičiuokime: jei pirmasis autobusas išvažiavo 11:05, tai antrasis išvažiuos 11:20, trečiasis 11:35, o ketvirtasis 11:50.

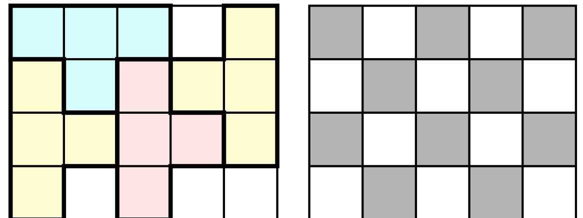
8. Ⓓ

! Onutė kelyje praleido dvi valandas, nes kelionės pabaigoje laikrodžio minutinė rodyklė buvo ten pat, kur ir pradžioje, o valandinė pasislinko per dvi padalas. Kadangi ji važiavo pastoviu greičiu, tai trečdalį kelio ji bus nuvažiavusi po trečdalio laiko, t.y. 40-ties minučių. Pasukę minutinę rodyklę nuo pradinės padėties per 40 minučių, gauname padėtį, atitinkančią atsakymą D.

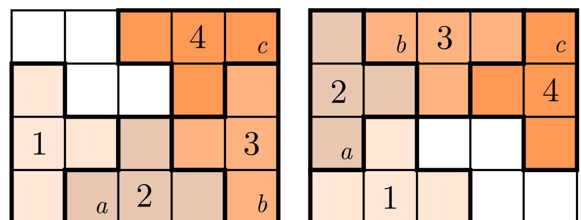
9. Ⓒ 4

! Patikrinkime visus skaičius nuo 21 iki 29: iš savo paskutiniojo skaitmens dalijasi 21, 22, 24 ir 25 – iš viso 4. Skaičiai 23, 26, 27, 28 ir 29 iš savo paskutiniojo skaitmens nesidalija.

10. Ⓒ 4



! Keturias detales sudėti nesudėtinga (žr. kairįjį paveikslėlį). Penkių detalių sudėti nepavyks. Norėdami tuo įsitikinti, nudažykime stačiakampį kaip šachmatų lentą (žr. dešinįjį paveikslėlį). Pastebėkime, kad kiekviena detalė uždengia arba 1 arba 3 baltus langelius, o jų iš viso yra 10. Jei galėtume sudėti į stačiakampį 5 detales, tai jos uždengtų visus langelius, taigi ir visus baltus langelius. Tačiau tai neįmanoma, nes penkių skaičių 1 arba 3 suma yra nelyginė, tad niekada nėra lygi 10.



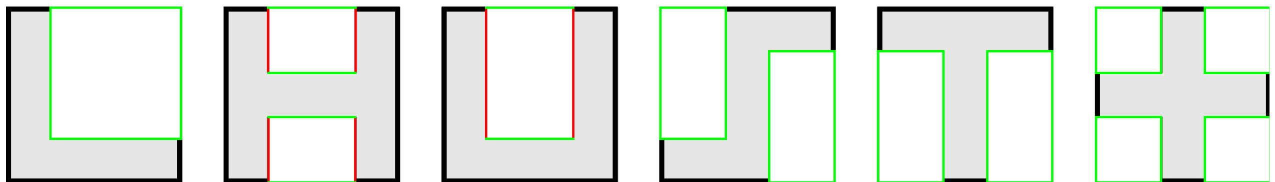
!! Samprotavimas apie langelių nudažymą yra kiek sudėtingas. Jo nesugalvojus, galima tiesiog išbandyti visus dėjimo variantus ir parodyti, kad nei vienu iš jų 5 detalių sudėti nepavyks. Vėlgi, jei 5 detales sudėti būtų galima, tai turėtume uždengti visus lentelės langelius. Pradėkime nuo kairiojo apatinio langelio. Jį uždengti galima dviem būdais, pavaizduotais paveikslėlyje (jį uždengia pirma detalė). Norėdami uždengti langelį a, turime dėti antrąją detalę taip, kaip pavaizduota. Dabar, norėdami uždengti langelį b turime dėti trečiąją detalę, ir norėdami uždengti c – ketvirtąją. Abiem atvejais lieka neuždengiama lentelės dalis.

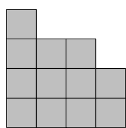
11. (C) 21

! Apskritimo skersmuo 10 taškų padalija į dvi dalis, vieną iš 4 taškų, kitą iš 6 taškų. Jei atkarpa jungsime du taškus iš skirtingų dalių, tai ji tikrai kirs skersmenį, tad reikia skaičiuoti tik atkarpas, jungiančias pirmos dalies taškus su pirmos dalies taškais, ir antros su antrais – visos jos tiks. Suskaičiuoti, keliomis atkarpomis galima sujungti 4 taškus, nesunku: pirmąjį tašką galima sujungti su trimis likusiais, antrą su dviem (sujungimą su pirmu jau suskaičiavome), o trečią su vienu. Iš viso $3 + 2 + 1 = 6$. Taip pat ir su 6 taškais: pirmą galime sujungti su 5 likusiais, antrą su 4, trečią su 3, ketvirtą su 2 ir penktą su 1. Iš viso $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Iš viso gavome $6 + 15 = 21$ atkarpą.

12. (C) 4

? Nupieštų figūrų ir kvadratinių popieriaus lapų perimetrus palyginsime jų neskaičiuodami. Vietoje to, kiekvieną figūros atkarpą pabandysime suporuoti su stačiakampio atkarpomis. Jei ir figūra ir stačiakampis turės po tiek pat vieno ilgio atkarpų, tai jų perimetrai bus lygūs. Paveikslėlyje apačioje pavaizduotos figūros su pažymėtomis atkarpomis. Juoda spalva pažymėtos atkarpos, kurios yra bendros ir figūrai ir kvadratui, žalia spalva pažymėtos suporuotos atkarpos, o raudona tos, kurioms poros nėra. Pavyzdžiui, pirmoji figūra (primenanti raidę L) turi keturias bendras atkarpas su popieriaus lapu ir dvi atkarpas, kurioms galime rasti po porą – vadinasi, šiuo atveju perimetrai lygūs. Antroji figūra (primenanti raidę H) turi 6 bendras atkarpas, dvi suporuotas ir keturias ne. Šiuo atveju figūra turi keturiomis atkarpomis daugiau nei popieriaus lapas, vadinasi, jos perimetras didesnis. Panagrinėję likusias figūras, nesunkiai įsitikinsite, kad ir trečiosios figūros (panašios į raidę U) perimetras didesnis, o likusių trijų lygūs.



13. (E) 

! Žiūrėdamas iš priekio, Jonas matys keturis bokštus. Kiekvienas bokštas bus tokio aukščio, koks yra aukščiausias bokštas tame stulpelyje. Aukščiausi stulpelių bokštai (trečiame ir ketvirtame stulpelyje tokių yra daugiau nei vienas) pažymėti paveikslėlyje. Iš kairės į dešinę jų aukščiai yra 4, 3, 3 ir 2, tad Jonas matys tokį vaizdą, koks pavaizduotas atsakyme E.

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

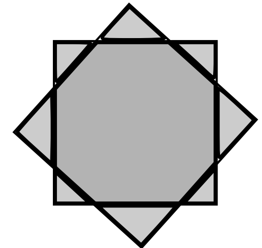
↑
Jonas

14. Ⓑ 6

! Skaičiuokime taip: 12 žuvų yra skirtumas tarp trigubo žuvų skaičiaus ir viengubo žuvų skaičiaus. Šis skirtumas yra lygus dvigubam žuvų skaičiui, vadinasi, Matas pagavo $12 : 2 = 6$ žuvis.

15. Ⓔ 9

? Nubrėžę du kvadratus galime gauti figūrą, susidedančią iš 9 dalių (žr. paveikslėlį). Tai yra pats didžiausias atsakymas iš duotųjų, vadinasi, jis yra teisingas.



16. Ⓑ 8 arba 9

! Pirmasis ir paskutinysis kandidatai kartu sudėjus gavo 16 balsų, tad likę trys kartu sudėjus gavo 20. Pastebėkime, kad ketvirtasis gavo bent 5 balsus (nes turi jų turėti daugiau nei paskutinysis), o trečiasis gavo bent 6 balsus, tad antrasis negali būti gavęs 10 ar daugiau balsų ($5+6+10 > 20$). Iš kitos pusės, jei antrasis bus gavęs tik 7 balsus, tai antro trečio ir ketvirto suma bus per maža $5+6+7 < 20$. Gavome, kad antrasis gali būti gavęs 8 arba 9 balsus, lieka įsitikinti, kad abu atvejai tikrai galimi. Iš ties, 8 balsus jis gali būti gavęs atveju 12, 8, 7, 5, 4, o 9 atveju 12, 9, 6, 5, 4.

17. Ⓓ 30

! Prieš išpjaunant pirmąjį kubelį, kubas turėjo 6 sienas. Išpjaudami vieną kubelį sienų skaičių padidiname trimis. Kadangi išpjaunami kubeliai nesikirs (jų kraštinės ilgis 1cm, kai viso kubo 3cm), tai kiekvienas iš jų pridės po 3. Kampų kubas turi 8, vadinasi, išpjovę visus kubelius gausime $6 + 8 \cdot 3 = 30$ sienų.

18. Ⓐ 40

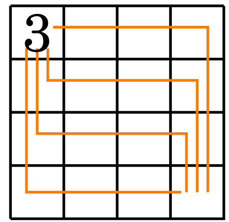
! Ieškomų porų bus tiek, kiek yra dviženklių skaičių, prie kurių pridėję 50 gausime taip pat dviženklį skaičių. Pats mažiausias toks skaičius bus 10 (nes visi mažesni jau bus vienženkliai), o pats didžiausias 49 (nes prie didesnio pridėję 50 jau gausime triženklį). Lieka tik rasti, kiek jų bus iš viso: $49 - 10 + 1 = 40$.

19. Ⓒ 5

! Po pirmojo kėlinio pirmavo svečių komanda ir buvo įmušti 6 įvarčiai, tad rezultatas galėjo būti 0 : 6, 1 : 5 arba 2 : 4 jų naudai. Per antrąjį kėlinį namų komanda įmušė tris įvarčius, tad rezultatas tapo 3 : 6, 4 : 5 arba 5 : 4. Tik paskutiniuoju atveju laimi namų komanda, vadinasi, tik jis tenkina sąlygą, ir namų komanda iš viso įmušė 5 įvarčius.

20. (D) 7

! Sujunkime du kampinius langelius (kairįjį viršutinį ir dešinį apatinį) keturiais skirtingais takais (žiūrėkite paveikslėlį). Per kiekvieną lentelės langelį eina bent vienas takas. Kiekvieno tako pradžioje yra skaičius 3 ir kiekvieno tako ilgis yra 7. Keliaujant taku per gretimus langelius skaičiai gali didėti tik per 1, tad skaičius 9 gali būti įrašytas tik pačiame paskutiniame, t.y. dešiniajame apatiniame, langelyje. Tuomet visi kiti tako skaičiai yra 4, 5, 6, 7, 8 ir gauname, jog iš viso lentelėje bus 7 skirtingi skaičiai: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



21. (A) Ado akmenėlis žalias

! Kadangi visi trys jie sako netiesą, tai Adas ir Benas bei Benas ir Domas turi skirtingus akmenėlius, o taip gali būti tik tuomet, kai Adas ir Domas turi vienokios spalvos akmenėlį, o Benas – kitokios. Jei Adas ir Domas turėtų po raudoną akmenėlį, tai Domas būtų sakęs teisybę, o taip būti negali. Vadinasi, Adas ir Domas turi po žalią akmenėlį, o Benas turi raudoną. Iš duotų teiginių teisingas A.

22. (D) 14

! Žinome, kad po pirmo etapo konkurse liko dalyvauti $66 - 21 = 45$ katės, iš kurių 27 dryžuotos ir 32 turi juodą ausį. Jei sudėsime $27 + 32$, tai gausime 59 – daugiau nei 45. Šis skirtumas atsiranda todėl, kad dryžuotas kates su juoda ausimi įskaičiavome du kartus – jos pateko ir tarp 27 dryžuotų, ir tarp 32 juodaausių. Kiekviena tokia dryžuota juodaausė katė skirtumą padidina vienetu, tad tokių kačių iš viso yra $59 - 45 = 14$.

23. (C) $\frac{1}{6}$

? Pažiūrėkime, kas vyksta Alei valgant: ji suvalgė ketvirtadalį likusios dalies, tad liko trys ketvirtadaliai likusios dalies, arba triskart daugiau nei ji suvalgė. Tas triskart daugiau, nei ji suvalgė, yra pusė pradinio šokolado, vadinasi, visas šokoladas bus 6 kartus daugiau – Alė suvalgė šeštadalį.

24. (B) 3

! Vieną po kito paspaudus antrą, trečią ir ketvirtą mygtukus, visi mygtukai tampa linksmi, vadinasi, trijų paspaudimų užtenka. Įsitikinkime, jog dviejų paspaudimų negana.

Atkreipkime dėmesį į ketvirtąjį (linksmą) mygtuką. Jei pirmuoju spaudimu paspaustume 3 ar 4 mygtuką, jis taptų liūdnas, tad ir antruoju spaudimu tektų spausti 3 arba 4 mygtuką. Jei, kita vertus, pirmuoju spaudimu nespaustume nei 3, nei 4 mygtuko, tai jų negalėtume spausti ir antruoju spaudimu, kad jo nenuliūdintume. Vadinasi, jei norėtume dviem spaudimais padaryti visus mygtukus linksmus, turėtume arba abu kartus rinktis iš 1 ir 2 mygtukų, arba iš 3 ir 4.

Bet abu šie atvejai netinka! Jei abu kartus spausime 1 arba 2 mygtukus, tai pirmasis (liūdnas) mygtukas po pirmo spaudimo taps linksmas, o po antro vėl bus liūdnas. Jei abu kartus spausime 3 arba 4 mygtukus, tai lygiai taip pat pralinksmės ir vėl nuliūs trečiasis mygtukas.

25. (A) 18

! Jei du berniukai yra susikibę rankomis, tai vienas yra padavęs kairę ranką, o kitas dešinę. Vadinasi, berniukų, kurie savo dešinę ranką yra padavę berniukui, yra tiek pat, kiek berniukų, kurie savo kairę ranką yra padavę berniukui. Bet tuomet berniukų, kurie savo kairiąją yra padavę mergaitei, yra tiek pat, kiek berniukų, kurie savo dešiniąją yra padavę mergaitei, t.y. 18.

26. (D) 60

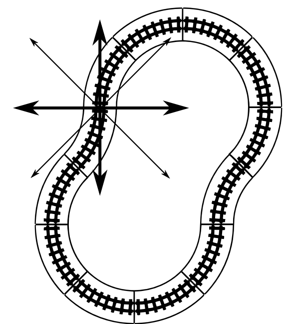
! Užsirašykime ieškomą triženklį skaičių kaip abc, tuomet sąlyga, kurią jis turi tenkinti, atrodys taip: $abc = cba + 297$, arba

$$\begin{array}{r} cba \\ +297 \\ \hline abc \end{array}$$

Tam, kad ši lygybė būtų teisinga, sumuodami $b + 9$ turime gauti b (ir vieną mintyje), vadinasi, jau sumuodami $a + 7$ turėjome gauti bent 10. Kadangi a negali būti lygus 3 (nes tokiu atveju c gautųsi lygus 0 ir cba būtų ne triženklis skaičius), tai a gali būti 4, 5, 6, 7, 8 arba 9. Kiekvienai iš šių šešių reikšmių gauname tik vieną c reikšmę, $c = a - 3$. Skaitmenį b galime pasirinkti bet kokį (iš dešimties galimų skaitmenų), tad iš viso gauname $6 \cdot 10 = 60$ skaičių.

27. (B) 12

? Paveikslėlyje pavaizduotas kelias, susidedantis iš 12 dalių. Jei įsitikintume, kad iš 11 dalių tokio kelio sudėti nepavyks, gautume, kad 12 yra teisingas atsakymas, nes mažesnių už jį be 11 nėra. Pradėkime nuo tokio pastebėjimo: kiekviena kelio detalė keičia įsivaizduojamo traukinio važiavimo kryptį. Jei pradėsime nuo Jono dviejų sujungtų detalių vidurio (žr. paveikslėlį), tai traukinys važiuos tiesiai į viršų, o pervažiavęs detalę pasisuks kiek į dešinę. Įsižiūrėję pamatysime, kad iš viso bus 8 kryptys, kuriomis ties detalių sujungimais gali važiuoti traukinys. Keturias iš jų – į viršų, į apačią, į kairę ir į dešinę – vadinkime pagrindinėmis, o likusias įžambinėmis. Dabar samprotaukime taip: kiekviena kelio detalė traukinio kryptį keičia iš pagrindinės į įžambinę arba atvirkščiai. Jei pradedame važiuoti pagrindine kryptimi, tai ir baigti turėsime pagrindine. Vadinasi, detalių turi būti lyginis skaičius, tad 11 netinka.



! Nors atsakymą jau išsiaiškinome, įsitikinkime, kad iš ties trumpesnio nei 12 dalių kelio Jonui sudėti nepavyks. Pirma atmeskime aiškiai per mažus variantus – bet kokiam uždaram keliui reikia bent 8 dalių, nes tam, kad traukinys važiuodamas apsisuktų, jis turi bent 8 kartus pakeisti kryptį. Iš 8 dalių susideda tik Jurgio kelias, tad Jonui dalių reikės dar daugiau. Variantai 9 ir 11 netinka, nes, kaip jau matėme, uždaro kelio dalių skaičius turi būti lyginis. Lieka vienintelis rimtas kandidatas – 10 dalių kelias. Pabandykime ją sudėti.

Tam, kad traukinys apsisuktų, bent 8 iš 10 dalių turės būti vienodos (t.y. sukti į tą patį šoną). Jei likusios abi dalys suks į priešingą pusę, tai traukinio starto ir finišo kryptys nesutaps – pakeitęs 8 kartus kryptį į vieną pusę ir 2 į kitą (nesvarbu kokia tvarka) jis galų gale stovės lyg kryptį būtų pakeitęs 6 kartus į vieną pusę – blogai. Vadinasi, likusios dvi dalys turi būti skirtingų krypčių ir iš viso turime turėti 9 dalis, kurios suka į vieną pusę ir vieną dalį, kuri suka į kitą pusę. Pravažiavęs tokį kelią traukinys tikrai finišuos tokia pačia kryptimi, kaip ir startuos, bet ar gali toks kelias būti uždaras?

Deja, ne – iš šių dalių kelio sudėti iš viso neįmanoma. Jei bandysime 9 vienodas ir 1 kitokią dalis sujungti, tai kažkurios 8 iš vienodų dalių eis viena po kitos ir susijungs į Jurgio apskritimą. Prie jo likusių dviejų dalių prijungti niekaip nepavyks.

28. (B) 1006

! Pradėkime nuo galo. Paskutinis išvykęs žmogus buvo teisus, sakydamas, kad po jo išvykimo riterių ir melagių liks po lygiai, vadinasi, jis buvo riteris. Priešpaskutinis, kita vertus, buvo neteisus, tą teigdamas, vadinasi, jis buvo melagis. Trečias nuo galo vėl buvo teisus, vadinasi, jis buvo riteris, ketvirtas vėl buvo neteisus, vadinasi, jis buvo melagis. Taip tęsdami samprotavimą gauname, kad riteriai ir melagiai išvykdavo pakaitomis, ir paskutinysis išvyko riteris. Kadangi iš viso pradžioje buvo 2013 gyventojų, tai ir pirmasis išvyko riteris, o melagių buvo $(2013 - 1)/2 = 1006$.

29. (D) 19

! Pažiūrėkime, kaip operacija „SUMOS“ pakeičia skaičių trejeto skirtumus. Tegu $\{a, b, c\}$ – bet koks skaičių trejetas. Atlikę operaciją „SUMOS“ vieną kartą, gausime trejetą $\{b+c, a+c, a+b\}$. Skirtumai tarp jo skaičių bus lygūs $b+c-a-c = b-a$, $b+c-a-b = c-a$ ir $a+c-a-b = c-b$, tokie pat kaip ir pradinio trejeto. Vadinasi, kad ir kiek kartų operaciją „SUMOS“ atliktume, skirtumai tarp skaičių liks tie patys, ir didžiausias iš jų bus lygus $20 - 1 = 19$.

30. (B) 68

! Kiekvieno kubelio bet kurios dvi greta esančios (t.y. ne priešingos) sienos bus suklijuotos su kitų kubelių sienomis, todėl sumuojant nebus įtrauktos į paviršiuje esančių skaičių sumą. Norint gauti didžiausią sumą, reikia, kad būtų neįtraukti kuo mažesni du skaičiai. Patys mažiausi ant kubelių užrašyti du skaičiai yra 1 ir 2, tačiau jie sulanksčius kubelį bus priešais vienas kitą. Antroje vietoje pagal mažumą yra skaičiai 1 ir 3, ir jie kaip tik yra greta vienas kito. Vadinasi, didžiausią sumą gausime, kai kiekvieno kubelio bus suklijuoti skaičiai 1 ir 3, o išorėje liks 6, 5, 4 ir 2. Taip suklijuoti nesunku – kubelius guldome ratu: pirmą kubelį guldome taip, kad skaičiai 1, 3 žiūrėtų į rato vidų, antrą kubelį (tai apverstas pirmas) guldome skaičiais 3, 1, trečią 1, 3, ketvirtą 3, 1. Susumavę išorės skaičius gauname $(6 + 5 + 4 + 2) \cdot 4 = 68$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	E
2	C
3	C
4	B
5	E
6	B
7	B
8	D
9	C
10	C
11	C
12	C
13	E
14	B
15	E
16	B
17	D
18	A
19	C
20	D
21	A
22	D
23	C
24	B
25	A
26	D
27	B
28	B
29	D
30	B

Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Kadetas

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Drungilas

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Kadetas, 7 klasė, 50 geriausiųjų

Justas Janickas,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	126,25
Neringa Levinskaitė,	„Atžalyno“ vidurinė mokykla,	Kauno m.,	113,50
Nedas Kuzas,	„Gabijos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	109,75
Mantas Bilaišis,	Utenos Aukštakalnio progimnazija,	Utenos r.,	108,50
Vilija Ročytė,	Sedos Vytauto Mačernio gimnazija,	Mažeikių r.,	108,50
Augustė Balzarytė,	Taikos progimnazija,	Vilniaus m.,	107,75
Emilė Znutaitė,	Abraomo Kulviečio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	106,25
Kristijonas Ruškys,	Judrėnų Stepono Dariaus pagrindinė mokykla,	Klaipėdos r.,	102,50
Rapolas Blažaitis,	Vilniaus tarptautinė Meridiano mokykla,	Vilniaus m.,	102,25
Paulius Sasnauskas,	Gytarių progimnazija,	Šiaulių m.,	101,25
Sandra Barysaitė,	Balsių pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	100,50
Dainius Dzialtuvas,	Karmėlavos Balio Buračo gimnazija,	Kauno r.,	99,75
Jonas Gruzdys,	Kauno Julijanavos katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	99,75
Kamile Valužytė,	Nacionalinė M. K. Čiurlionio menų mokykla,	Vilniaus m.,	99,75
Kristijonas Trinkūnas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	99,00
Milda Janeikaitė,	Viečiūnų pagrindinė mokykla,	Druskininkų sav.,	98,75
Berta Rėja Butvilaitė,	Gegužių progimnazija,	Šiaulių m.,	97,50
Eglė Tankelevičiūtė,	„Romuvos“ progimnazija,	Šiaulių m.,	97,50
Rokas Jurkus,	Kauno Juozo Naujalio muzikos gimnazija,	Kauno m.,	96,00
Tomas Dundulis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	95,50
Ieva Elija Jucevičiūtė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	94,75
Gabrielė Ramanauskaitė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	94,50
Kristijonas Samuolis,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav.,	94,50
Daniela Menddelevič Menddelevič,	Šolomo Aleichemo gimnazija,	Vilniaus m.,	94,25
Dominyka Razanovaitė,	Meškuičių gimnazija,	Šiaulių r.,	94,25
Lukas Stravinskas,	„Volungės“ pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	94,25
Aleksej Sarzan,	„Gerosios vilties“ vidurinė mokykla,	Visagino sav.,	94,00
Gabrielė Juodytė,	Emilijos Pliaterytės progimnazija,	Vilniaus m.,	94,00
Gabrielius Deveikis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	93,75
Kristijonas Šiaulys,	Plungės Senamiesčio vidurinė mokykla,	Plungės r.,	93,75
Gabrielė Čiuladaitė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	93,00
Elena Gliebutė,	Mikalojaus Daukšos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	92,50
Gintarė Malikėnaitė,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	92,50
Augustas Žvirblis,	Utenos Aukštakalnio progimnazija,	Utenos r.,	92,00
Jokūbas Butkus,	Kazimiero Paltaroko gimnazija,	Panevėžio m.,	92,00
Barbora Bacytė,	Mikalojaus Daukšos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	91,25
Domantas Sabaliauskas,	Kaišiadorių Vaclovo Giržado progimnazija,	Kaišiadorių r.,	91,25
Sergej Kliauzov,	„Pajūrio“ pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m.,	91,25
Aistis Grigas,	Vilniaus tarptautinė Meridiano mokykla,	Vilniaus m.,	90,75
Lukas Cikanavičius,	Širvintų „Atžalyno“ progimnazija,	Širvintų r.,	90,25
Miglė Varnaitė,	Dainavos vidurinė mokykla,	Kauno m.,	90,25
Irmantas Račaitis,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	90,00
Julija Gecaitė,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	90,00
Julija Kesylytė,	Rokiškio Juozo Tūbelio progimnazija,	Rokiškio r.,	90,00
Pijus Bradulskis,	Kauno Jono Žemaičio-Vytauto progimnazija,	Kauno m.,	90,00
Emil Starodubov,	Ukmergės Senamiesčio pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	89,75
Joris Žiliukas,	Mikalojaus Daukšos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	89,75
Laurynas Stravinskas,	Prienų „Revuonos“ vidurinė mokykla,	Prienų r.,	89,75
Vismantas Stonkus,	Ragainės progimnazija,	Šiaulių m.,	89,75
Akvilė Valentukonyte,	Šiuolaikinės mokyklos centras,	Vilniaus m.,	88,75
Viljamas Rakauskas,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	88,75

Kadetas, 8 klasė, 50 geriausiųjų

Gustas Buividavičius,	Kybartų „Saulės“ progimnazija,	Vilkaviškio r.,	125,00
Matas Deveikis,	Kauno Jono Žemaičio-Vytauto progimnazija,	Kauno m.,	122,50
Benjaminas Venslovas,	Utenos Aukštakalnio progimnazija,	Utenos r.,	118,75
Tomas Dailidonis,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	117,50
Džiugas Sabonis,	Dainavos pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	116,25
Lina Šalčiūtė,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	116,25
Arnoldas Čiplys,	Širvintų „Atžalyno“ progimnazija,	Širvintų r.,	113,75
Justina Kilikauskaitė,	Milikonių vidurinė mokykla,	Kauno m.,	113,75
Robertas Baravykas,	Vasilijaus Kačialovo gimnazija,	Vilniaus m.,	113,75
Dovydas Dzežulskis,	Grinkiškio Jono Poderio vidurinė mokykla,	Radviliškio r.,	111,25
Paulius Andzelis,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	111,25
Vilius Kateiva,	Žemynos progimnazija,	Vilniaus m.,	111,25
Sima Trepenaitytė,	Kačerginės pagrindinė mokykla,	Kauno r.,	109,75
Kajus Panevėžys,	Vinco Kudirkos progimnazija,	Kauno m.,	109,50
Gustas Mockus,	Žemynos progimnazija,	Vilniaus m.,	108,75
Aurimas Klimašauskas,	Emilijos Pliaterytės progimnazija,	Vilniaus m.,	108,50
Zigmas Bitinas,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	108,50
Ignas Pelakauskas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	108,25
Matas Valiukas,	Jokūbavo A. Stulginskio pagrindinė mokykla,	Kretingos r.,	107,50
Emilija Bogdanovičiūtė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	107,00
Kasparas Ragaišis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	105,00
Simas Kasparavičius,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	105,00
Vidas Parnarauskas,	Širvintų „Atžalyno“ progimnazija,	Širvintų r.,	104,75
Ignas Masiulionis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	103,75
Aurimas Petrėtis,	Žemynos progimnazija,	Vilniaus m.,	103,50
Gilbertas Umbražūnas,	Simono Dacho progimnazija,	Klaipėdos m.,	103,50
Lina Kavaliauskaitė,	Dainavos vidurinė mokykla,	Kauno m.,	101,25
Mantas Kryževičius,	Ragainės progimnazija,	Šiaulių m.,	101,25
Nida Duobaitė,	Simono Daukanto vidurinė mokykla,	Kauno m.,	101,25
Paulius Tručinskas,	Juozo Grušo meno vidurinė mokykla,	Kauno m.,	101,25
Giedrius Cvetkovas,	Žygimanto Augusto pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	101,00
Danielė Gervytė,	Martyno Mažvydo vidurinė mokykla,	Kauno m.,	100,00
Andrius Bendoraitis,	Šakių „Varpo“ vidurinė mokykla,	Šakių r.,	99,75
Darius Kurtinaitis,	Garliavos vidurinė mokykla,	Kauno r.,	99,75
Eva Duko,	Jeruzalės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	99,75
Jonas Pukšta,	Šv. Kristoforo progimnazija,	Vilniaus m.,	99,00
Gabrielė Gucagaitė,	„Atžalyno“ vidurinė mokykla,	Kauno m.,	98,50
Žymantas Klovas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	98,50
Dovydas Raminas,	Kretingos Pranciškonų gimnazija,	Kretingos r.,	97,50
Džiugas Šimaitis,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	97,50
Lukas Krikščionaitis,	Vadžgirio pagrindinė mokykla,	Jurbarko r.,	97,50
Deividas Kniaževas,	Vydūno vidurinė mokykla,	Klaipėdos m.,	97,25
Martynas Stankevičius,	Vinco Kudirkos progimnazija,	Kauno m.,	97,00
Karolina Baltrušaitytė,	Kačerginės pagrindinė mokykla,	Kauno r.,	96,75
Žygimantas Navickas,	Varėnos „Ryto“ progimnazija,	Varėnos r.,	96,75
Gvidas Serepinas,	Kretingos Pranciškonų gimnazija,	Kretingos r.,	96,50
Marija Romeikaitė,	Milikonių vidurinė mokykla,	Kauno m.,	96,50
Gustė Čėsnaitė,	Mažvydo progimnazija,	Klaipėdos m.,	96,25
Titas Laurinaitis,	Piliuonos vidurinė mokykla,	Kauno r.,	96,25
Lukas Gečiauskas,	Tuskulėnų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	95,75

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9(G1)	10(G2)	11(G3)	12(G4)
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	7	☐	☐	☐	☐	☐	13	☐	☐	☐	☐	☐	19	☐	☐	☐	☐	☐	25	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	8	☐	☐	☐	☐	☐	14	☐	☐	☐	☐	☐	20	☐	☐	☐	☐	☐	26	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	9	☐	☐	☐	☐	☐	15	☐	☐	☐	☐	☐	21	☐	☐	☐	☐	☐	27	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	10	☐	☐	☐	☐	☐	16	☐	☐	☐	☐	☐	22	☐	☐	☐	☐	☐	28	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	11	☐	☐	☐	☐	☐	17	☐	☐	☐	☐	☐	23	☐	☐	☐	☐	☐	29	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	12	☐	☐	☐	☐	☐	18	☐	☐	☐	☐	☐	24	☐	☐	☐	☐	☐	30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Lygiakraščio trikampio plotas lygus 9. Trys tiesės, lygiagrečios trikampio kraštinėms, dalija kiekvieną iš jų į tris lygias dalis. Kam lygus pilkosios trikampio dalies plotas?
A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

2. Aišku, kad lygybė $\frac{1111}{101} = 11$ yra teisinga. Kam lygi reiškinio $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$ reikšmė?
A) 5 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 55 **E)** 99

3. Skirtumas tarp skaičiaus 7 didžiausio dviženklio kartotinio ir skaičiaus 7 mažiausio dviženklio kartotinio lygus:
A) 70 **B)** 77 **C)** 84 **D)** 91 **E)** 98

4. Kvadratinio popieriaus lapo abi pusės padalytos į mažus kvadratėlius (žr. kairįjį pav.). Kirpdama per kvadratėlių kraštines, Onutė iškirpinėja vienodas figūras, kaip kad pavaizduotoji dešiniajame paveikslėlyje. Kiek mažiausiai nepanaudotų kvadratėlių jai gali likti?
A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

5. Antanas lentoje parašė mažiausią natūralųjį skaičių, kurio skaitmenų sandauga lygi 24. Kam lygi šio skaičiaus skaitmenų suma?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

6. Dėžėje yra keturių skirtingų spalvų rutuliai: 2 raudoni, 3 mėlyni, 4 žali ir 5 juodi. Atsitiktinai iš dėžės imami rutuliai ir negrąžinami atgal į dėžę. Kiek mažiausiai rutulių reikia paimti iš dėžės, kad tarp paimtų rutulių būtinai būtų bent du tos pačios spalvos rutuliai?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 14

7. Algimantas kas 10 minučių uždega po žvakę. Kiekviena žvakė sudega per 40 minučių. Kiek žvakių degs praėjus 55 minutėms nuo tada, kai Algimantas uždegė pirmąją?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

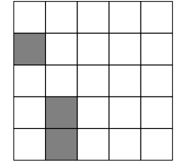
8. Yra penkios šeimos. Vidutinis šių šeimų vaikų skaičius negali būti lygus:
A) 0,2 **B)** 1,2 **C)** 2,2 **D)** 2,4 **E)** 2,5

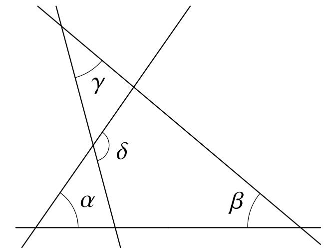
9. Martynas ir Jūratė stovi apskrito fontano priešingose pusėse (žr. pav.). Jie abu tuo pačiu metu pradeda bėgti apie fontaną pagal laikrodžio rodyklę. Martyno greitis lygus $\frac{9}{8}$ Jūratės greičio. Kiek kartų Jūratė bus apibėgusi apie fontaną, kai Martynas pirmą kartą ją pasivys?
A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 2 **E)** 72

10. Natūralieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ ir $z \cdot x = 35$. Kam lygus skaičius $x + y + z$?
A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

Klausimai po 4 taškus

11. Leticija su drauge 5×5 lentelėje žaidžia žaidimą „laivų mūšis“ ir joje pažymėjo du laivus (žr. pav.). Keliais būdais Leticija šioje lentelėje gali pažymėti trijų langelių laivą (t.y. 3×1 arba 1×3), kad jokie du lentelėje pažymėti laivai neturėtų nė vieno bendro taško?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

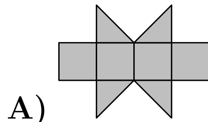
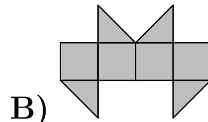
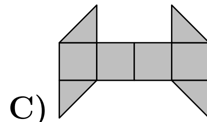
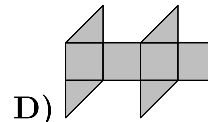
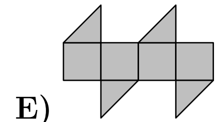




12. Brėžinyje kampai $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ ir $\gamma = 35°$. Kam lygus kampas δ?
A) 100° **B)** 105° **C)** 120° **D)** 125° **E)** 130°

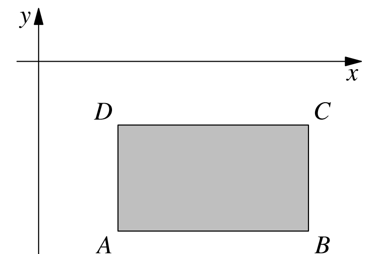
13. Trapecijos visų kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai, o jos perimetras lygus 5. Kam lygūs du mažiausi trapecijos kampai?
A) 30° ir 30° **B)** 60° ir 60° **C)** 45° ir 45° **D)** 30° ir 60° **E)** 45° ir 90°

14. Iš kurios figūros, lankstant per pažymėtas linijas, neįmanoma išlankstyti kubo?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

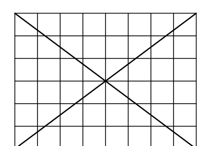
15. Romualdas lentoje parašė kelis iš eilės einančius natūraliuosius skaičius. Kuris iš žemiau išvardytų skaičių negali būti lentoje parašytų nelyginių skaičių procentų skaičius?
A) 40 **B)** 45 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 60

16. Paveikslėlyje pavaizduotas stačiakampis $ABCD$, kuris yra žemiau koordinačių ašies Ox ir dešiniau koordinačių ašies Oy. Stačiakampio kraštinės yra lygiagrečios koordinačių ašims, kiekvienos jo viršūnės abi koordinatės yra sveikieji skaičiai. Kiekvienai stačiakampio $ABCD$ viršūnei suskaičiuojame jos koordinačių santykį $\frac{y}{x}$. Kuriai stačiakampio viršūnei šis santykis yra mažiausias?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** To neįmanoma nustatyti



17. Lentoje didėjimo tvarka surašyti visi keturženkliai skaičiai, gaunami perstatant skaičiaus 2013 skaitmenis vietomis. Kam lygus didžiausias skirtumas tarp gretimų lentoje parašytų skaičių?
A) 702 **B)** 703 **C)** 693 **D)** 793 **E)** 198

18. Paveikslėlyje pavaizduotame 6×8 stačiakampyje lygiai 24 langelių nekerta nė viena šio stačiakampio įstrižainė. Kiek 6×10 stačiakampio langelių nekirs nė viena jo įstrižainė?
A) 28 **B)** 29 **C)** 30 **D)** 31 **E)** 32

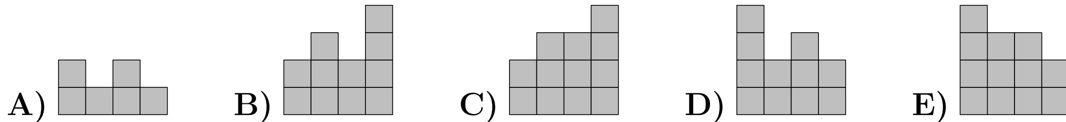


19. Arūno, Birutės, Cecilijos, Donato ir Elenos gimimo datos yra šios: 2001-02-20, 2000-03-12, 2001-03-20, 2000-04-12 ir 2001-04-23 (metai-mėnuo-diena). Arūnas ir Elena gimė tą patį mėnesį. Taip pat ir Birutė su Cecilija yra gimusios tą patį mėnesį. Arūnas ir Cecilija gimė skirtingų mėnesių tą pačią dieną. Donatas ir Elena taip pat gimė skirtingų mėnesių tą pačią dieną. Kuris iš vaikų yra jauniausias?
A) Arūnas **B)** Birutė **C)** Cecilija **D)** Donatas **E)** Elena

20. Jonas iš kubelių sudėjo statinį. Paveikslėlyje greta pavaizduotas statinio vaizdas iš viršaus. Ant kiekvieno viršutinio kubelio yra užrašytasis skaičius nurodo, kelių kubelių aukščio yra atitinkamas bokštas. Kokį vaizdą matys Jonas, žiūrėdamas į statinį?

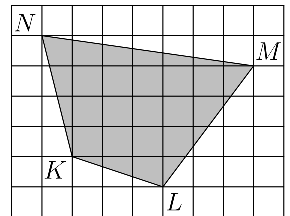
Jonas ↓

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2



Klausimai po 5 taškus

21. Languotame popieriaus lape, kurio kiekvieno langelio kraštinės ilgis yra 2, nupieštas keturkampis $KLMN$ (žr. pav.). Taškai K, L, M ir N yra langelių viršūnės. Kam lygus keturkampio $KLMN$ plotas?
A) 96 **B)** 84 **C)** 76 **D)** 88 **E)** 104



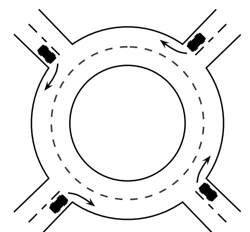
22. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2013^6 išrinkime tuos, kurie yra sveikojo skaičiaus kvadratas, o jų kiekį pažymėkime raide S. Iš tų pačių natūraliųjų skaičių išrinkime tuos, kurie yra sveikojo skaičiaus kubas, o jų kiekį pažymėkime raide Q. Tada:
A) $S = Q$ **B)** $2S = 3Q$ **C)** $3S = 2Q$ **D)** $S = 2013Q$ **E)** $S^3 = Q^2$

23. Jonas lentoje užrašė penkiaženklį skaičių, o nutrynęs vieną jo skaitmenį gavo keturženklį skaičių. Šio keturženklio skaičiaus ir pradinio penkiaženklio skaičiaus suma lygi 52713. Kam lygi pradinio penkiaženklio skaičiaus skaitmenų suma?
A) 26 **B)** 20 **C)** 23 **D)** 19 **E)** 17

24. Sodininkas į eilę pasodino 20 medžių (klevų ir liepų). Nėra tokių dviejų klevų, tarp kurių augtų lygiai trys medžiai. Kiek daugiausiai klevų gali būti iš šių 20 medžių?
A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

25. Artūras ir Dainius dalyvavo bėgimo varžybose. Dalyvių, užėmusių žemesnes už Artūrą vietas, buvo dvigubai daugiau nei dalyvių, užėmusių aukštesnes už Dainių vietas. Dalyvių, užėmusių žemesnes už Dainių vietas, buvo pusantro karto daugiau nei dalyvių, užėmusių aukštesnes už Artūrą vietas. Artūras užėmė 21 vietą. Kiek mokinių dalyvavo varžybse?
A) 31 **B)** 41 **C)** 51 **D)** 61 **E)** 81

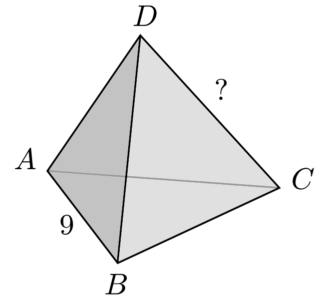
26. Keturios mašinos tuo pačiu metu skirtingais keliais įvažiuoja į žiedinę sankryžą (žr. pav.). Mašinos, žiedinėje sankryžoje apvažiavusius mažiau nei vieną ratą, išvažiuoja iš sankryžos skirtingais keliais. Kiek yra skirtingų būdų mašinoms išvažiuoti iš žiedinės sankryžos?
A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 81



27. Kiekvienas sekos $1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, \ldots$ narys (pradedant trečiuoju) lygus dviejų prieš jį einančių narių sandaugai. (Pavyzdžiui, šeštasis sekos narys lygus penktojo ir ketvirtojo sandaugai.) Kam lygi pirmųjų 2013 šios sekos narių suma?
A) -1006 **B)** -671 **C)** 0 **D)** 671 **E)** 1007

28. Mama vaikams vieną po kito kepė 6 lietinius (numeruokime lietinius paeiliui skaičiais nuo 1 iki 6). Vaikai retkarčiais įbėgdavo į virtuvę ir suvalgydavo karščiausią lietinį. Kuria tvarka vaikai negalėjo suvalgyti visų šešių lietinių?
A) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ **B)** $1, 2, 5, 4, 3, 6$ **C)** $3, 2, 5, 4, 6, 1$ **D)** $4, 5, 6, 2, 3, 1$ **E)** $6, 5, 4, 3, 2, 1$

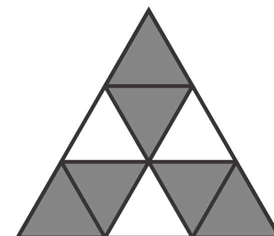
29. Kiekviena iš keturių tetraedro viršūnių ir kiekviena iš šešių jo briaunų pažymėta vienu iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 11 (skaičius 10 praleistas). Kiekvienas iš šių skaičių panaudotas lygiai vieną kartą. Bet kuriose dviejose viršūnėse pažymėtų skaičių suma lygi tas viršūnes jungiančios briaunos skaičiui. Briauna AB pažymėta skaičiumi 9 (žr. pav.). Kokiu skaičiumi pažymėta briauna CD?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 11



30. Natūralusis skaičius N yra mažesnis už trijų didžiausių savo daliklių (neskaitant paties skaičiaus N) sumą. Kuris iš teiginių yra teisingas?
A) Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 4 **B)** Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 5
C) Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 6 **D)** Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 7
E) Tokio skaičiaus N nėra

Sprendimai

1. (D) 6



! Padalykime trikampį į 9 lygius lygiakraščius trikampėlius, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada pilkoji pradinio trikampio dalis sudaryta iš 6 trikampėlių, kurių kiekvieno plotas lygus 1. Taigi pradinio trikampio pilkosios dalies plotas lygus 6.

2. (D) 55

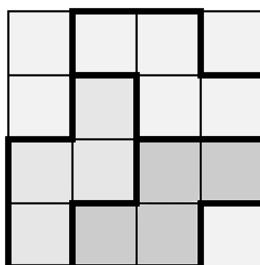
! Kadangi $\frac{3333}{101} = 3 \cdot \frac{1111}{101} = 33$ ir $\frac{6666}{303} = \frac{6}{3} \cdot \frac{1111}{101} = 22$, tai $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303} = 55$.

3. (C) 84

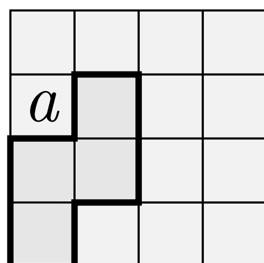
! Didžiausias skaičiaus 7 dviženklis kartotinis yra 98, o mažiausias – 14, todėl ieškomas skirtumas lygus $98 - 14 = 84$.

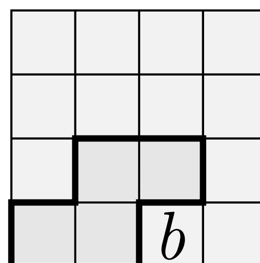
4. (C) 4

! Iš duoto popieriaus lapo galima iškirpti tris figūras (šiuo atveju lieka keturi nepanaudoti kvadratėliai):



Paaiškinsime, kodėl iškirpti keturių figūrų neįmanoma. Iš tikrųjų, jei iš duoto kvadratinio popieriaus lapo būtų įmanoma iškirpti keturias figūras, tai turėtume panaudoti visus 16 langelių. Apatinį kairįjį langelį galima būtų iškirpti dviem būdais:





Tačiau pirmuoju atveju nebeįmanoma iškirpti a langelio, o antruoju – b langelio.

5. Ⓔ 11

! Antanas lentoje negalėjo parašyti vienaženklio skaičiaus, nes tokio skaičiaus skaitmenų sandauga taip pat yra vienaženklis skaičius, kuris nelygus 24.

Skaičiaus 38 skaitmenų sandauga lygi $3 \cdot 8 = 24$, todėl Antanas lentoje parašė dviženklį skaičių. Jei dviženklio skaičiaus pirmasis skaitmuo yra 1 arba 2, tai jo skaitmenų sandauga ne didesnė už $2 \cdot 9 = 18$. Vadinasi, skaičius 38 yra pats mažiausias natūralusis skaičius, kurio skaitmenų sandauga lygi 24.

6. Ⓒ 5

! Iš viso turime 4 spalvų rutulius, todėl, iš dėžės išėmus 5 rutulius, bent du iš jų bus tos pačios spalvos. Kita vertus, 4 rutulių neužtenka: ištraukus po vieną raudoną, mėlyną, žalią ir juodą rutulį, visi šie rutuliai bus skirtingų spalvų.

7. Ⓒ 4

! Per 55 minutes (skaičiuoti pradedant nuo pirmosios žvakės uždegimo) Algimantas iš viso uždega 6 žvakes. Per šį laiko tarpą sudega pirmoji ir antroji žvakės, o trečiajai žvakei degti lieka 5 minutės. Taigi praėjus 55 minutėms nuo pirmosios žvakės uždegimo vis dar degs $6 - 2 = 4$ žvakės.

8. Ⓔ $2,5$

! Vidutinis penkių šeimų vaikų skaičius gaunamas bendrą visų šių šeimų vaikų skaičių padalijus iš 5. Vadinasi, iš viso penkiose šeimose esančių vaikų skaičius yra penkis kartus didesnis už vidurkį. Kadangi skaičius $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ nėra sveikasis, tai vidutinis penkių šeimų vaikų skaičius negali būti 2,5.

Įsitikinsime, kad **A**–**D** atsakymuose nurodyti vidurkiai yra galimi. Vidutinį visų šeimų vaikų skaičių pažymėkime v. Jei pirmoje šeimoje yra vienas vaikas, o kitos šeimos vaikų neturi, tai $v = \frac{1}{5} = 0,2$. Jei pirmoje šeimoje yra du vaikai, o likusiose – po vieną, tai $v = \frac{6}{5} = 1{,}2$. Jei pirmoje šeimoje yra trys vaikai, o likusiose – po du, tai $v = \frac{11}{5} = 2{,}2$. Ir, pagaliau, jei pirmoje šeimoje yra keturi vaikai, o likusiose – po du, tai $v = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

9. Ⓐ 4

! Martynui vejantis Jūratę, atstumas tarp jų mažėja aštuonis kartus lėčiau už Jūratės greitį. Vadinasi, Martynui pasivijus Jūratę, ji bus nubėgusi 8 kartus ilgesnį kelią apie fontaną nei pradinis atstumas tarp jų (skaičiuojamas bėgant ratu apie fontaną), kuris lygus pusei rato apie fontaną ilgio. Taigi Martynui pasivijus Jūratę, ši bus apibėgusi apie fontaną lygiai 4 ratus.

10. (C) 14

! Rasime skaičius x, y ir z. Sudauginę duotąsias lygybes, gauname $xy \cdot yz \cdot xz = 14 \cdot 10 \cdot 35$, todėl $xyz = 70$. Taigi $x = \frac{xyz}{yz} = \frac{70}{10} = 7$, $y = \frac{xyz}{xz} = \frac{70}{35} = 2$, $z = \frac{xyz}{xy} = \frac{70}{14} = 5$. Vadinasi, $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$.

11. (E) 8

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

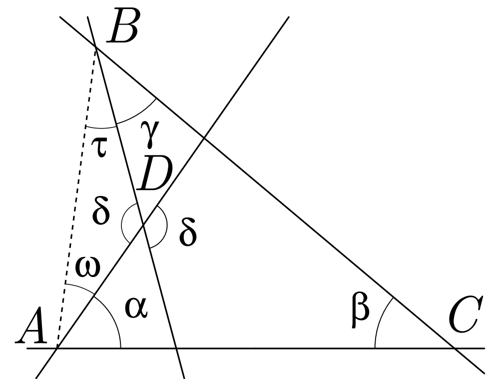
! Sunumeruokime 5×5 lentelės eilutes ir stulpelius, kaip parodyta paveikslėlyje. Jei Leticija 1×3 laivą pažymės trečioje, ketvirtoje arba penktoje eilutėje, tai jis turės bent vieną bendrą tašką su toje lentelėje pažymėtu 2×1 laivu. Kita vertus, pirmoje ir antroje eilutėse pažymėti 1×3 laivą, neturintį bendrų taškų su pažymėtais 1×1 ir 2×1 laivais, Leticija gali vieninteliu būdu. Taigi Leticija 1×3 laivą gali pažymėti lygiai 2 būdais.

Jei Leticija 3×1 laivą pažymės pirmame, antrame arba trečiame stulpelyje, tai jis turės bent vieną bendrą tašką su toje lentelėje pažymėtu 2×1 laivu. Kita vertus, tiek ketvirtame, tiek ir penktame stulpelyje pažymėti 3×1 laivą, neturintį bendrų taškų su pažymėtais 1×1 ir 2×1 laivais, Leticija gali lygiai 3 būdais. Taigi Leticija 3×1 laivą gali pažymėti lygiai 6 būdais.

Vadinasi, Leticija lygiai $2 + 6 = 8$ būdais 5×5 lentelėje gali pažymėti trijų langelių laivą (3×1 arba 1×3), kad jokie du lentelėje pažymėti laivai neturėtų nė vieno bendro taško.

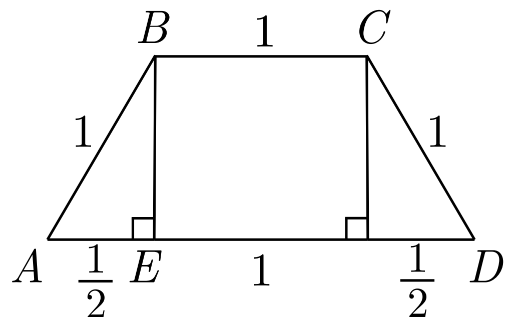
12. (E) 130°

! Brėžinyje pažymėkime kampus τ ir ω bei viršūnes A, B, C ir D (žr. pav.). Taip pat sujunkime taškus A ir B. Trikampio ABD kampų suma lygi 180°: $\tau + \omega + \delta = 180°$. Be to, trikampio ABC kampų suma taip pat lygi 180°: $\tau + \gamma + \beta + \alpha + \omega = 180°$. Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją, gauname $\delta = \alpha + \beta + \gamma = 55° + 40° + 35° = 130°$.



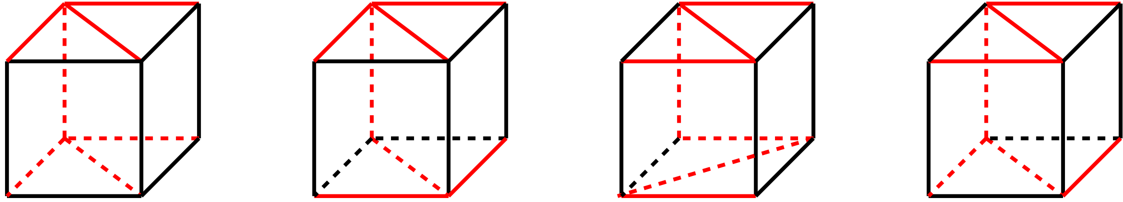
13. (B) 60° ir 60°

! Nesunku įsitikinti, kad trapecijos kraštinių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2. Taigi trapecija lygiašonė, o jos pagrindo ilgis yra 2. Iš trapecijos viršūnių B ir C į jos pagrindą AD nuleiskime statmenis (žr. pav.). Stačiojo trikampio ABE statinio AE ilgis lygus pusei įžambinės AB, todėl $\angle ABE = 30°$. Vadinasi, $\angle BAE = 90° - \angle ABE = 90° - 30° = 60°$. Kadangi trapecija lygiašonė, tai $\angle CDA = \angle BAE = 60°$.



14. Ⓒ

? Kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą kubą kerpame išilgai raudonų linijų ir išlankstome (lenkiama išilgai kubo briaunų). Tokiu būdu gausime **A**, **B**, **D** ir **E** atsakymuose nurodytas figūras.



Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, lygiai vienas atsakymas yra teisingas.

15. Ⓑ 45

? Parodysime, kad atsakymų variantai **A**, **C**, **D** ir **E** galimi:

tarp natūraliųjų skaičių 2, 3, 4, 5, 6 yra lygiai 40% nelyginių skaičių;
tarp natūraliųjų skaičių 2, 3, 4, 5, $\ldots$, 24, 25, 26 yra lygiai 48% nelyginių skaičių;
tarp natūraliųjų skaičių 1, 2 yra lygiai 50% nelyginių skaičių;
tarp natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, 4, 5 yra lygiai 60% nelyginių skaičių.

Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, lygiai vienas atsakymas yra teisingas, tad renkamės atsakymą **B**.

! Įrodysime, kad iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje negali būti lygiai 45% nelyginių skaičių. Iš tikrųjų, sakykime, kad yra tokia iš eilės einančių natūraliųjų skaičių seka, kurioje nelyginiai skaičiai sudaro lygiai 45% visų skaičių. Jei sekoje yra lyginis narių skaičius, tai lygiai 50% jos narių yra nelyginiai skaičiai. Vadinasi, nagrinėjamos sekos narių skaičius yra nelyginis, kurį pažymėkime $2n + 1$; čia n – natūralusis skaičius.

Mažiausią nagrinėjamos sekos skaičių pažymėkime a. Tuomet ši seka yra $a, a+1, \ldots, a+2n$. Jei skaičius a yra lyginis, tai sekoje yra lygiai n nelyginių skaičių, todėl nelyginių skaičių procentų skaičius yra $\frac{100n}{2n+1}$. Jei skaičius a yra nelyginis, tai sekoje yra lygiai $n+1$ nelyginis skaičius, todėl nelyginių skaičių procentų skaičius yra $\frac{100(n+1)}{2n+1}$. Taigi $\frac{100n}{2n+1} = 45$ arba $\frac{100(n+1)}{2n+1} = 45$. Nesunku įsitikinti, kad nei viena iš šių lygčių neturi sprendinių natūraliaisiais skaičiais. Vadinasi, nėra tokios iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekos, kurioje nelyginiai skaičiai sudarytų lygiai 45% visų skaičių.

16. Ⓐ A

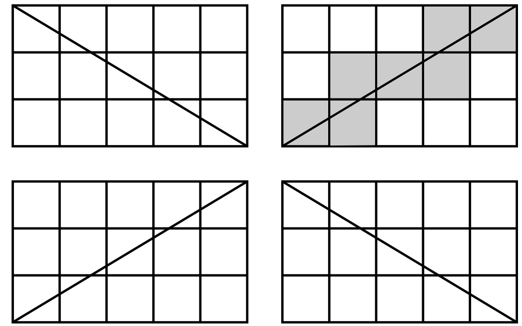
! Kiekvienos stačiakampio viršūnės abscisė yra teigiama, o jos ordinatė – neigiama, todėl jos koordinačių santykis $\frac{y}{x}$ bus visada neigiamas. Taigi santykis $\frac{y}{x}$ bus mažiausias, kai $\frac{|y|}{x}$ bus didžiausias, t. y., kai $|y|$ bus didžiausias, o x – mažiausias. Vadinasi, santykis $\frac{y}{x}$ bus mažiausias viršūnei A.

17. Ⓐ 702

! Jei dviejų gretimų lentoje parašytų skaičių tūkstančių skaitmenys sutampa, tai skirtumas tarp jų ne didesnis už $321 - 12 = 309$. Kita vertus, jei dviejų gretimų lentoje parašytų skaičių tūkstančių skaitmenys yra skirtingi, tai šie skaičiai yra 1320 ir 2013 arba 2310 ir 3012. Pirmuoju atveju skirtumas yra $2013 - 1320 = 693$, o antruoju – $3012 - 2310 = 702$. Taigi didžiausias skirtumas tarp gretimų lentoje parašytų skaičių yra 702.

18. Ⓔ 32

! 6×10 stačiakampį padalykime į keturis 3×5 stačiakampius, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Šie stačiakampiai yra simetriški, todėl užtenka nagrinėti vieną 3×5 stačiakampį ir vieną jo įstrižainę. Pažymėkime 3×5 stačiakampyje visus langelius, kuriuos kerta jo įstrižainė (žr. dešinįjį viršutinį stačiakampį). Jų yra lygiai 7, todėl 3×5 stačiakampyje yra lygiai $3\cdot5-7 = 8$ langeliai, kurių nekerta jo įstrižainė. Vadinasi, 6×10 stačiakampyje yra lygiai $4 \cdot 8 = 32$ langeliai, kurių nekerta nė viena jo įstrižainė.



19. Ⓑ Birutė

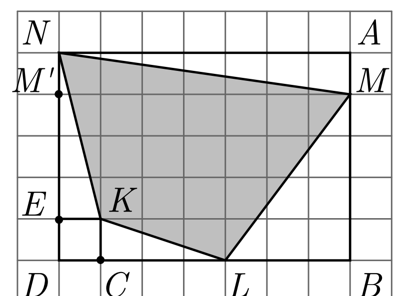
! Vasario mėnuo tarp duotų gimimo datų pasitaiko vieną kartą, o kovo ir balandžio – po du. Vadinasi, Arūnas ir Elena gimė kovo mėnesį, o Birutė ir Cecilija – balandžio, arba atvirkščiai – Arūnas ir Elena gimė balandžio mėnesį, o Birutė ir Cecilija –kovo. Taigi Donato gimimo data yra 2001-02-20. Kadangi Donatas ir Elena gimė tą pačią dieną, tai Elenos gimimo data yra 2001-03-20, todėl Arūnas gimė 2000-03-12. Kadangi Arūnas ir Cecilija gimė tą pačią dieną, tai Cecilijos gimimo data yra 2000-04-12, todėl Birutė gimė 2001-04-23. Taigi Birutė yra jauniausias vaikas.

20. Ⓒ

! Jonas, žiūrėdamas į statinį (iš užpakalio), mato, kad pirmas bokštas iš dešinės sudarytas iš 4 kubelių, antras – iš 3 (mato aukščiausią bokštą toje eilėje), trečias – iš 3, o ketvirtas – iš 2.

21. Ⓑ 84

! Išilgai langelių kraštinių nubrėžkime stačiakampį, kaip parodyta paveikslėlyje. Stačiakampio $NABD$ plotas lygus $10 \cdot 14 = 140$. Trikampio NAM plotas lygus pusei stačiakampio $NAMM'$ ploto, kuris lygus $2 \cdot 14 = 28$. Taigi trikampio NAM plotas lygus 14. Panašiai randame, kad trikampio MBL plotas lygus 24, trikampio LCK plotas lygus 6, o trikampio KEN plotas lygus 8. Be to, kvadrato $EKCD$ plotas lygus $2 \cdot 2 = 4$. Taigi keturkampio $KLMN$ plotas lygus $140 - 14 - 24 - 6 - 8 - 4 = 84$.



22. (D) $S = 3013Q$

! Kadangi $2013^6 = (2013^3)^2$, tai nuo 1 iki 2013^6 yra visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2013^3 kvadratai. Taigi $S = 2013^3$. Panašiai gauname, kad nuo 1 iki 2013^6 yra visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2013^2 kubai, todėl $Q = 2013^2$. Vadinasi, $S = 2013Q$. Nesunku įsitikinti, kad skaičiai S ir Q tenkina tik atsakymo **D** lygybę.

23. (C) 23

! Kadangi skaičiaus 52713 paskutinis skaitmuo 3 yra nelyginis, tai Jonas nutrynė paskutinį penkiaženklio skaičiaus skaitmenį (jeigu Jonas būtų išbraukęs ne paskutinį skaitmenį, tai penkiaženklio ir keturženklio skaičių paskutiniai skaitmenys sutaptų, todėl jų sumos paskutinis skaitmuo būtų lyginis). Jono lentoje užrašytą penkiaženklį skaičių pažymėkime $\overline{abcde}$. Jonui išbraukus paskutinį šio penkiaženklio skaičiaus skaitmenį, gaunamas keturženklis skaičius $\overline{abcd}$. Taigi

$$\begin{array}{r} \overline{abcde} \\ +\ \overline{abcd} \\ \hline 52713 \end{array}$$

Aišku, kad skaitmuo a lygus 4 arba 5. Tačiau jei $a = 5$, tai skaičių $\overline{abcde}$ ir $\overline{abcd}$ suma būtų ne mažesnė už $50000 + 5000 = 55000$, o taip nėra. Taigi $a = 4$. Tada

$$\begin{array}{r} \overline{bcde} \\ +\ \overline{bcd} \\ \hline 8713 \end{array}$$

Iš čia matyti, kad $b = 7$ arba $b = 8$. Jei $b = 8$, tai $\overline{bcde} + \overline{bcd} \geqslant 8000 + 800 = 8800 > 8713$. Taigi $b = 7$. Gauname lygybę

$$\begin{array}{r} \overline{cde} \\ +\ \overline{cd} \\ \hline 1013 \end{array}$$

iš kurios matyti, kad $c = 9$. Tuomet

$$\begin{array}{r} \overline{de} \\ +\ d \\ \hline 23 \end{array}$$

Aišku, kad $d = 1$ arba 2. Jei $d = 1$, tai $e = 12$, bet tada e nėra skaitmuo. Taigi $d = 2$, o tada $e = 1$. Vadinasi, Jonas ant lentos užrašė penkiaženklį skaičių 47921.

24. (C) 12

! Nesunku įsitikinti, kad sodininkas uždavinio sąlygoje minimu būdu gali pasodinti 12 klevų. Iš tikrųjų, sodininkas klevus ir liepas į eilę galėtų sodinti tokia tvarka:

KKKKLLLLKKKKLLLLKKKK,

čia K žymi klevą, o L – liepą. Tarkime, kad sodininkas į eilę pasodino 20 medžių (liepų ir klevų), tarp kurių yra bent 13 klevų. Įrodysime, kad būtinai atsiras du klevai, tarp kurių pasodinti lygiai trys medžiai. Iš tikrųjų, į eilę susodintus medžius paeiliui pažymėkime raidėmis A, B, C ir D:

ABCDABCDABCDABCDABCD

Tuomet atsiras keturi klevai, pažymėti ta pačia raide (jei kiekviena raide būtų pažymėti ne daugiau kaip trys klevai, tai iš viso sodininkas būtų pasodinęs ne daugiau kaip $3 \cdot 4 = 12$ klevų). Paprastumo dėlei tarkime, kad ši raidė yra A. Taigi yra bent keturi klevai, pažymėti raide A. Iš viso yra penki A raide pažymėti medžiai, todėl atsiras du iš eilės einantys A raide pažymėti klevai (t. y. tarp jų nėra kito A raide pažymėto medžio). Belieka pastebėti, kad tarp bet kurių dviejų iš eilės einančių ta pačia raide pažymėtų medžių yra pasodinti lygiai trys medžiai.

25. (B) 41

! Kadangi Artūras užėmė 21 vietą, tai už jį žemesnę vietą užėmusių dalyvių buvo 20, todėl lygiai 10 dalyvių užėmė aukštesnes vietas už Dainių. Varžybose dalyvavusių mokinių skaičių pažymėkime x. Tada dalyvių, užėmusių žemesnes vietas už Dainių, buvo $x - 11$, o dalyvių, užėmusių aukštesnes vietas už Artūrą buvo $x - 21$. Pagal sąlygą $x - 11 = \frac{3}{2}(x - 21)$. Iš čia randame $x = 41$.

26. (A) 9

! Mašinas pažymėkime A, B, C ir D. Yra lygiai 3 keliai, kuriais mašina A gali išvažiuoti iš žiedo: mašinų B, C ir D keliai. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad mašina A iš žiedo išvažiavo mašinos B keliu. Mašinai B iš žiedo išvažiuoti taip pat yra 3 keliai: mašinų A, C ir D keliai. Parodysime, kad kiekvienu atveju mašinos C ir D iš žiedo išvažiuoja vieninteliu būdu.

Jei mašina B iš žiedo išvažiavo mašinos A keliu, tai mašinos C ir D iš žiedo išvažiuotų viena kitos keliais, t. y. mašina C išvažiuotų mašinos D keliu (nes savo keliu išvažiuoti negali), o mašina D – mašinos C keliu.

Jei mašina B iš žiedo išvažiavo mašinos C keliu, tai mašinoms C ir D iš žiedo išvažiuoti lieka mašinų A ir D keliai. Tačiau mašina D negali išvažiuoti savo keliu, todėl ji išvažiuos mašinos A keliu, o mašina C – mašinos D keliu.

Panašiai įsitikiname, kad jei mašina B iš žiedo išvažiavo mašinos D keliu, tai mašina C išvažiuos mašinos A keliu, o mašina D – mašinos C keliu.

Taigi jei mašina A iš žiedo išvažiuoja mašinos B keliu, tai likusios mašinos išvažiuoti iš žiedo gali lygiai 3 būdais. Vadinasi, iš žiedo mašinos gali išvažiuoti $3 \cdot 3 = 9$ būdais.

(Taip pat žr. Senjoro 30 uždavinio sprendimą.)

27. (B) -671

! Nesunku pastebėti, kad sekos nariai kartojasi kas 3, t. y. seka periodiškai kartojasi blokais $1, -1, -1$. Skaičius 2013 dalijasi iš 3: $2013 = 3 \cdot 671$, todėl sudėdami 2013 pirmuosius duotos sekos narius, juos galime grupuoti po tris:

$$(1-1-1)+(1-1-1)+(1-1-1)+\cdots+(1-1-1).$$

Kiekviename bloke esančių skaičių suma lygi $1-1-1=-1$, o iš viso blokų yra $\frac{2013}{3}=671$. Taigi sekos pirmųjų 2013 narių suma lygi -671.

28. (D) $4, 5, 6, 2, 3, 1$

! Vaikai negalėjo suvalgyti blynų **D** atsakyme nurodyta tvarka $4, 5, 6, 2, 3, 1$. Iš tikrųjų, šia tvarka valgant šaltesnis 2 blynas būtų suvalgomas anksčiau už karštesnį 3 (valgant 4 blyną, 1, 2 ir 3 jau buvo iškepti). Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, teisingas atsakymas gali būti tik vienas. Nesunku įsitikinti, kad vaikai galėjo suvalgyti blynus kiekviena iš atsakymuose **A**, **B**, **C** ir **E** nurodyta tvarka.

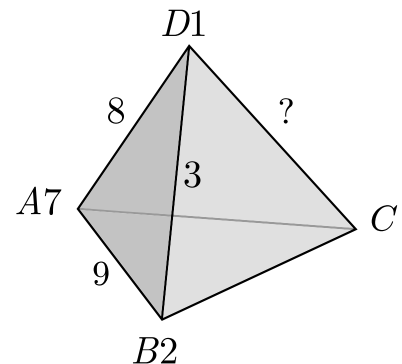
29. (B) 5

! Skaičiai 1 ir 2 negali būti parašyti tetraedro briaunose, nes šių skaičių neįmanoma išreikšti dviejų skirtingų natūraliųjų skaičių suma. Vadinasi, skaičiais 1 ir 2 pažymėtos tetraedro dvi viršūnės.

Sakykime, kad viršūnės C ir D pažymėtos skaičiais 1 ir 2 (nebūtinai šia tvarka). Kadangi viršūnėse A ir B pažymėtų skaičių suma yra 9, tai šie skaičiais ne didesni už 8. Tada bet kuris iš briaunose AD, AC, BD, BC ir CD pažymėtų skaičių yra ne didesnis už $8+2=10$. Vadinasi, jokia briauna ir jokia viršūnė nepažymėta skaičiumi 11, o taip būti negali.

Taigi skaičiumi 1 arba 2 pažymėta viena iš viršūnių A arba B.

Jei viršūnė A arba B pažymėta skaičiumi 1, tai kita iš jų pažymėta skaičiumi 8, nes, pagal sąlygą, šiose viršūnėse pažymėtų skaičių suma yra 9. Tačiau tada briauna, kurios galai pažymėti skaičiais 2 ir 8, pažymėta skaičiumi 10, o taip būti negali.



Vadinasi, viršūnė A arba B pažymėta skaičiumi 2, o viršūnė C arba D pažymėta skaičiumi 1. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad skaičiumi 2 pažymėta viršūnė B, o skaičiumi 1 – viršūnė D. Tada briauna BD pažymėta skaičiumi $2+1=3$. Viršūnė A pažymėta skaičiumi 7 (viršūnėse A ir B pažymėtų skaičių suma yra 9), todėl briauna AD pažymėta skaičiumi 8 (žr. pav.). Taigi liko skaičiai 4, 5, 6 ir 11, kuriais gali būti pažymėta viršūnė C. Ji negali būti pažymėta skaičiumi 5, nes tada briauna BC būtų pažymėta skaičiumi $2+5=7$, kuriuo jau pažymėta viršūnė A. Taip pat viršūnė C negali būti pažymėta skaičiumi 6, nes tada briauna CD būtų pažymėta skaičiumi $6+1=7$. Pagaliau, viršūnė C negali būti pažymėta skaičiumi 11, nes tada briauną CD reikėtų pažymėti skaičiumi $11+1=12$, o tai neįmanoma. Vadinasi, viršūnė C pažymėta skaičiumi 4, todėl briauna CD pažymėta skaičiumi 5. (Briauna AC pažymėta skaičiumi 11, o briauna BC – skaičiumi 6.)

30. (C) Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 6

? Skaičius 30 tenkina uždavinio sąlygą ($6+10+15=31>30$), todėl netinka atsakymas **E**. Kita vertus, skaičius 30 nesidalija nei iš 4, nei iš 7, todėl netinka atsakymai **A** ir **D**.
Skaičius 12 taip pat tenkina uždavinio sąlygą: $3+4+6=13>12$. Be to, 12 nesidalija iš 5, todėl netinka ir atsakymas **B**. Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, teisingas atsakymas gali būti tik vienas.

! Įrodysime, kad visi tokie skaičiai N dalijasi iš 6. Iš tikrųjų, tegul $1<a<b<c$ – keturi mažiausi skaičiaus N dalikliai, neskaitant paties N. Tada $\frac{N}{a}$, $\frac{N}{b}$ ir $\frac{N}{c}$ – trys didžiausi šio skaičiaus dalikliai. Remiantis uždavinio sąlyga, teisinga nelygybė $\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}>N$. Abi nelygybės puses padaliję iš skaičiaus N, gauname nelygybę

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1.$$

Kadangi $a<b<c$, tai $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ir $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$, todėl

$$\frac{3}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1,$$

t. y. $\frac{3}{a}>1$. Iš čia gauname nelygybę $a<3$. Taigi $a=2$. Šią reikšmę įstatę į nelygybę $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$, gauname

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}.$$

Kadangi $b<c$, tai

$$\frac{2}{b}>\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2},$$

todėl $\frac{2}{b}>\frac{1}{2}$, t. y. $b<4$. Kadangi $b>a=2$, tai $b=3$. Taigi skaičius N dalijasi iš $a=2$ ir iš $b=3$, todėl šis skaičius dalijasi ir iš $2\cdot 3=6$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	D
3	C
4	C
5	E
6	C
7	C
8	E
9	A
10	C
11	E
12	E
13	B
14	C
15	B
16	A
17	A
18	E
19	B
20	C
21	B
22	D
23	C
24	C
25	B
26	A
27	B
28	D
29	B
30	C

Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Junioras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Valentas Brasas,	Alsėdžių vidurinė mokykla,	Plungės r.,	119,75
Jonas Mockūnas,	Alsėdžių vidurinė mokykla,	Plungės r.,	108,75
Vaiva Augustinaitė,	Žemaičių Kalvarijos vidurinė mokykla,	Plungės r.,	103,25
Akvilė Viršilaitė,	Skuodo Pranciškaus Žadeikio gimnazija,	Skuodo r.,	102,50
Eva Derengovska,	Eišiškių gimnazija,	Šalčininkų r.,	102,00
Gintautas Lasevičius,	Kaišiadorių Algirdo Brazausko gimnazija,	Kaišiadorių r.,	102,00
Adriana Vilkaite,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	101,25
Rosita Urnikytė,	Žemaičių Kalvarijos vidurinė mokykla,	Plungės r.,	99,75
Marta Voitkevičiūtė,	Vladislavo Sirokomlės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	98,75
Einaras Sipavičius,	Kėdainių „Šviesioji“ gimnazija,	Kėdainių r.,	96,25
Edvinas Repečka,	„Aušros“ gimnazija,	Kauno m.,	95,00
Juzef Kučinski,	Adomo Mickevičiaus gimnazija,	Vilniaus m.,	93,75
Lukas Martišius,	Lieporių gimnazija,	Šiaulių m.,	93,50
Justina Novikovaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	92,50
Tadas Budrikas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	92,50
Nikita Daniliuk,	Vasilijaus Kačialovo gimnazija,	Vilniaus m.,	90,75
Arnas Steponavičius,	Šiaulių universiteto gimnazija,	Šiaulių m.,	90,00
Asta Jarašiūtė,	Kapčiamiesčio Emilijos Pliaterytės mokykla,	Lazdijų r.,	90,00
Kasparas Kralikas,	Marijampolės Rygiškių Jono gimnazija,	Marijampolės sav.,	90,00
Lukas Naruševičius,	5-oji gimnazija,	Panevėžio m.,	90,00
Marius Kurbakovas,	Jotvingių gimnazija,	Alytaus m.,	90,00
Rokas Giedraitis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	89,75
Aušrinė Aglinskaitė,	Utenos Adolfo Šapokos gimnazija,	Utenos r.,	89,00
Gediminas Jacunskas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	88,75
Paulius Birmanas,	Simono Daukanto gimnazija,	Vilniaus m.,	88,75
Romas Baronas,	Žirmūnų gimnazija,	Vilniaus m.,	88,75
Regimantas Narkus,	Salantų gimnazija,	Kretingos r.,	88,50
Andrejus Kostarevas,	Didždvario gimnazija,	Šiaulių m.,	88,00
Darja Poimanova,	Aleksandro Puškino vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	88,00
Liudvikas Čiapas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	87,75
Haroldas Mackelo,	Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,	Širvintų r.,	87,50
Mindaugas Čekanauskas,	Kretingos Pranciškonų gimnazija,	Kretingos r.,	87,50
Silvija Juciūtė,	Telšių Žemaitės gimnazija,	Telšių r.,	87,25
Simonas Gervė,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	86,50
Denis Krupičiovič,	Šalčininkų „Santarvės“ vidurinė mokykla,	Šalčininkų r.,	86,25
Gediminas Barasa,	Palangos senoji gimnazija,	Palangos m.,	86,25
Paulius Saulėnas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	86,25
Viltė Pranauskaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	86,25
Kamilė Tumšytė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	86,00
Arnoldas Gritė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	85,75
Tadas Žutautas,	Veiviržėnų gimnazija,	Klaipėdos r.,	85,75
Aistė Kudulytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	85,50
Ričardas Lukaševičius,	Grigiškių „Šviesos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	85,50
Darius Burinskis,	Vladislavo Sirokomlės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	85,00
Evaldas Saročka,	Generolo Povilo Plechavičiaus jaunojo kario mokykla,	Kauno m.,	85,00
Domantas Valčeckas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	84,75
Dovydas Morkūnas,	Anykščių Antano Vienuolio gimnazija,	Anykščių r.,	84,75
Lukas Visockas,	Žirmūnų gimnazija,	Vilniaus m.,	84,75
Rokas Kireilis,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav.,	84,75
Jurgis Vaiginis,	Šv. Kristoforo gimnazija,	Vilniaus m.,	84,25

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Domantas Jadenkus,	Grigiškių „Šviesos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	132,50
Meilė Petrauskaitė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	119,75
Domantas Bružas,	Naujosios Akmenės Ramučių gimnazija,	Akmenės r.,	118,50
Patricija Šapokaitė,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	118,50
Augustas Dulskis,	Žirmūnų gimnazija,	Vilniaus m.,	116,25
Jonas Budrauskas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	108,75
Maksim Bovarov,	Naujamiesčio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	108,75
Gabija Kielaitė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	107,50
Marius Baškys,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	106,25
Rokas Tomkevičius,	„Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	106,00
Emilijus Stankus,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	104,75
Dariuš Cilind,	Eišiškių gimnazija,	Šalčininkų r.,	102,25
Rūta Vitkutė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	102,00
Ernest Bitkivskij,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	101,25
Mantas Pranskaitis,	Stasio Šalkauskio gimnazija,	Šiaulių m.,	101,25
Tadas Retys,	Ukmergės Antano Smetonos gimnazija,	Ukmergės r.,	101,25
Artur Nakliuda,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	100,75
Mantas Petrikas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	100,00
Vygintas Vytartas,	Marijampolės Sūduvos gimnazija,	Marijampolės sav.,	100,00
Edmundas Riškus,	Kuršėnų Pavenčių vidurinė mokykla,	Šiaulių r.,	98,75
Saulius Beinorius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	98,75
Dinas Janisovas,	Kauno „Vyturio“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	97,00
Alanas Plaščinskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	96,25
Milda Jundulaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	96,00
Indrė Tuminauskaitė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	94,50
Mantas Dirma,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	93,75
Olga Joana Šmitaitė,	Žirmūnų gimnazija,	Vilniaus m.,	93,75
Eivydas Račkauskas,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	93,50
Nikita Šurin,	„Juventos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	93,50
Greta Rodevič,	Eišiškių gimnazija,	Šalčininkų r.,	93,25
Kšyštof Šeibak,	Simono Konarskio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	93,25
Justinas Kavoliūnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	92,50
Miglė Tartėnaitė,	Vievio gimnazija,	Elektrėnų sav.,	92,50
Simonas Pilkauskas,	„Minties“ gimnazija,	Vilniaus m.,	92,50
Šarūnas Totoraitis,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	92,25
Kamil Kuznecov,	Sužionių vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	92,00
Paulius Adomavičius,	Šilutės Vydūno gimnazija,	Šilutės r.,	91,25
Jokūbas Čepėnas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	90,50
Justas Juknys,	Ukmergės Antano Smetonos gimnazija,	Ukmergės r.,	90,25
Jolanta Krasadomska,	Sužionių vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	90,00
Rugilė Jurevičiūtė,	Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija,	Kauno r.,	90,00
Adomas Danilevičius,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	89,75
Gytis Ramanauskas,	Radviliškio Vaižganto gimnazija,	Radviliškio r.,	88,75
Ieva Barkauskaitė,	Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija,	Kretingos r.,	88,75
Julija Janeiko,	„Juventos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	88,75
Maria Kamila Žygis,	Maišiagalos Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	88,75
Robertas Repeckas,	„Vėtrungės“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	88,50
Tadas Mankus,	„Varpo“ gimnazija,	Kauno m.,	88,50
Augustė Jurenkovaitė,	Ukmergės Antano Smetonos gimnazija,	Ukmergės r.,	87,50
Baltrus Šivickis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	87,50
Ernest Lokutivevskij,	Vilniaus r. Rukainių vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	87,50
Paulius Janonis,	Biržų „Aušros“ vidurinė mokykla,	Biržų r.,	87,50
Žilvinas Spučys,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	87,50

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

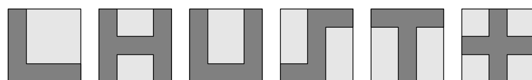
1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Skaičius $200013 - 2013$ nesidalija iš:
A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

2. Gretutė ant vienodų kvadratinių lapelių užtušavo pavaizduotas figūras.

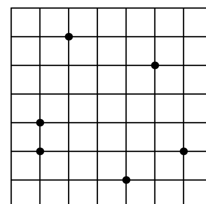


Kelių figūrų perimetrai lygūs lapelio perimetrui?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

3. Ponia Aurelija pamatė parduotuvėje tokį skelbimą: „Kukurūzų akcija!!! 20 centų už burbuolę! Kas šešta burbuolė nemokama!“ Ji tučtuojau nupirko po 4 burbuoles kiekvienam iš savo 4 vaikų. Kiek ji sumokėjo?
A) 0,80 Lt **B)** 1,20 Lt **C)** 2,80 Lt **D)** 3,20 Lt **E)** 80 Lt

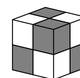
4. Sudauginus tris iš skaičių 2, 4, 16, 25, 50, 125, gauta sandauga 1000. Kam lygi tų trijų skaičių suma?
A) 70 **B)** 77 **C)** 131 **D)** 143 **E)** Kitas skaičius

5. Popieriaus lapas padalytas į kvadratinius vienetinio ploto langelius. Jame pažymėti šeši taškai (žr. pav.). Sujungus tris iš jų atkarpomis, susidarė trikampis. Koks yra mažiausias galimas to trikampio plotas?
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** 2



6. Skaičių 4^{15} ir 8^{10} suma yra dvejeto laipsnis. Ji lygi:
A) 2^{10} **B)** 2^{15} **C)** 2^{20} **D)** 2^{30} **E)** 2^{31}

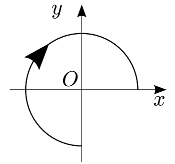
7. Popierinis kubas nudažytas juodai ir baltai, ir atrodo taip, tarsi jį sudarytų keturi balti ir keturi juodi kubeliai. Kokį vaizdą galime gauti išskloję kubą?

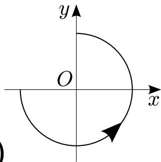


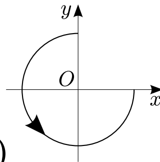
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

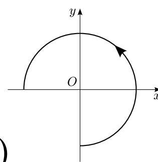
8. Imame skaičiaus 4 didžiausią triženklį kartotinį ir skaičiaus 4 mažiausią triženklį kartotinį. Kam lygus tų dviejų kartotinių skirtumas?
A) 900 **B)** 899 **C)** 896 **D)** 225 **E)** 224

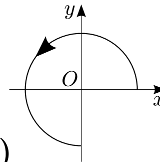
9. Brėžinyje šalia matome apskritimą be ketvirčio ir jame pažymėtą rodyklę. Kokį vaizdą gausime, pasukę tą figūrą 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę aplink tašką O, o tada pakeitę ją veidrodiniu atspindžiu Ox ašies atžvilgiu?

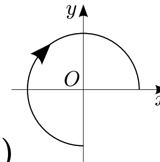












A) **B)** **C)** **D)** **E)**

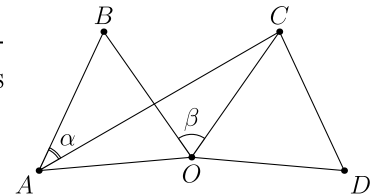
10. Kuris iš išvardytų skaičių yra didžiausias?

A) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{20}\cdot 13$ **C)** $20\cdot\sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{201}\cdot 3$ **E)** $\sqrt{2013}$

Klausimai po 4 taškus

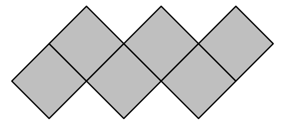
11. Lygiakraštį trikampį AOB pasukus aplink tašką O, gautas trikampis COD. Žinoma, kad $\beta = \angle BOC = 70°$ (žr. pav.). Kam lygus kampas $\alpha = \angle BAC$?

A) 20° **B)** 25° **C)** 30° **D)** 35° **E)** 40°



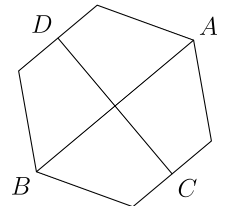
12. Paveikslėlyje pavaizduotas „zigzagas“, sudarytas iš šešių vienetinių langelių. Jo perimetras lygus 14. Kam lygus sudaryto iš 2013 langelių „zigzago“ perimetras?

A) 2022 **B)** 4028 **C)** 4032 **D)** 6038 **E)** 8050



13. Atkarpa AB jungia dvi priešingas taisyklingojo šešiakampio viršūnes. Atkarpa CD jungia jo dviejų priešingų kraštinių vidurio taškus (žr. pav.). Raskite šių atkarpų ilgių sandaugą, jei šešiakampio plotas lygus 60.

A) 40 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 100

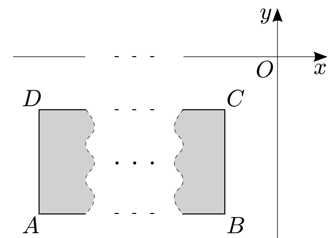


14. Vienos klasės mokiniai parašė testą. Jei kiekvienas berniukas būtų gavęs 3 balais daugiau, klasės pažymių vidurkis būtų didesnis 1,2 balo. Kurią klasės dalį sudaro mergaitės?

A) 20% **B)** 30% **C)** 40% **D)** 60% **E)** Nustatyti neįmanoma

15. Stačiakampis $ABCD$ yra III koordinačių sistemos ketvirtyje, o jo kraštinės lygiagrečios su koordinačių ašimis (žr. pav.). Kiekvienai viršūnei priskiriamas skaičius, lygus jos koordinačių santykiui $y:x$. Kurios viršūnės skaičius bus mažiausias?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** Nustatyti neįmanoma

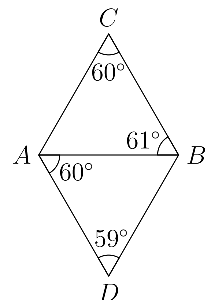


16. Šiandien ir pono Jono, ir jo sūnaus gimtadienis. Jų amžių (metais) sandauga lygi 2013. Kuriais metais gimė ponas Jonas?

A) 1981 **B)** 1982 **C)** 1953 **D)** 1952 **E)** Nustatyti neįmanoma

17. Rugilė mėgino nubrėžti iš lygiakraščių trikampių sudarytą rombą, bet išmatavusi kampus suprato suklydusi (žr. pav.). Kuri iš penkių atkarpų yra ilgiausia?

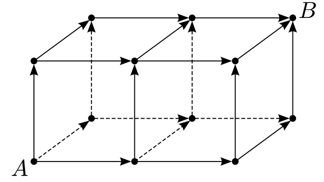
A) AD **B)** AC **C)** AB **D)** BC **E)** BD



18. Penki iš eilės einantys natūralieji skaičiai pasižymi tokia savybe: trijų iš jų suma lygi kitų dviejų sumai. Kiek yra tokių skaičių penketų?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Daugiau nei 3

19. Keliais būdais įmanoma iš taško A patekti į tašką B, einant rodyklių nurodyta kryptimi (žr. pav.)?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15



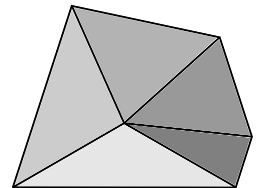
20. Duotas šešiaženklis natūralusis skaičius, kurio skaitmenų suma lyginė, o sandauga − nelyginė. Kuris iš šių teiginių apie duotąjį skaičių gali būti teisingas?
A) Lyginiai yra du arba keturi jo skaitmenys **B)** Tokio skaičiaus nėra
C) Jo nelyginių skaitmenų skaičius nelyginis **D)** Visi šeši jo skaitmenys skirtingi
E) Teiginiai **A**−**D** klaidingi

Klausimai po 5 taškus

21. Skaičius $\frac{1}{1024000}$ užrašytas baigtine dešimtaine trupmena, kurios paskutinis skaitmuo nenulinis. Kiek skaitmenų užrašyta po kablelio?
A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 1024000

22. Kiek yra natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas dalijasi iš 2013 ir turi lygiai 2013 natūraliųjų daliklių (įskaitant 1 ir patį skaičių)?
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** Kitas skaičius

23. Keli lygiašoniai trikampiai, suglausti šoninėmis kraštinėmis, sudaro iškyląjį daugiakampį (žr. pav.). Trikampių kampų, turinčių bendrą viršūnę, dydžiai laipsniais yra natūralieji skaičiai 24°, 48°, 72°, 96°, 120°, gauti dauginant mažiausiąjį iš 1, 2, 3, ... Linas tokiu pat būdu suglaudė tiek lygiašonių trikampių, kiek tik įmanoma. Kiek laipsnių turi mažiausias iš bendraviršūnių kampų Lino brėžinyje?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 8



24. Sakoma, kad su skaičių trejetu atlikta operacija „SUMOS“, jei kiekvienas iš trijų skaičių pakeičiamas kitų dviejų suma. Pvz., skaičius $3, 4, 6$ operacija „SUMOS“ paverčia skaičiais $10, 9, 7$, o šiuos savo ruožtu − skaičiais $16, 17, 19$. Pradėkime nuo skaičių $1, 2, 3$. Po kelių tokių operacijų trejete pirmą kartą pasirodys skaičius 2013?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 2013 **E)** Skaičiaus 2013 negausime

25. Skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 surašome ratu (nebūtinai iš eilės). Prie kiekvieno skaičiaus pridėję du jam gretimus, gauname 10 sumų. Mažiausiąją iš jų pažymime s. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti s?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

26. Linas skaičius nuo 1 iki 22 suskirstė į 11 porų. Didesnįjį kiekvienos poros skaičių jis padalijo iš mažesniojo. Kiek daugiausiai natūraliųjų skaičių galėjo gauti Linas?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

27. Sujungus tris duotojo taisyklingojo trylikakampio viršūnes, susidarė trikampis. Trylikakampio centras atsidūrė to trikampio viduje. Kiek yra tokių trikampių?
A) 72 **B)** 85 **C)** 91 **D)** 100 **E)** Kitas skaičius

28. Pirmasis automobilis išvyko iš Greitogalos pastoviu 50 km/h greičiu. Nuo to laiko kas valandą iš Greitogalos išvykdavo po automobilį. Kiekvienas iš jų buvo 1 km/h greitesnis už prieš tai išvykusį. Paskutinis automobilis 100 km/h greičiu išvyko 50 valandų vėliau nei pirmasis. Koks yra automobilio, važiavusio visų kitų priešaky po 100 valandų nuo pirmojo automobilio starto, greitis?
A) 50 km/h **B)** 66 km/h **C)** 75 km/h **D)** 84 km/h **E)** 100 km/h

29. Palei kelią viena eile auga 100 medžių: ąžuolų ir uosių. Nėra tokių dviejų ąžuolų, tarp kurių augtų lygiai 5 medžiai. Kiek daugiausiai ąžuolų auga palei kelią?
A) 48 **B)** 50 **C)** 52 **D)** 60 **E)** Aprašytoji situacija neįmanoma

30. Ūkininkas išėjo apžiūrėti laukų. Jis pamatė traktorių, tempiantį ilgą vamzdį, ir ėmė matuoti vamzdžio ilgį 1 metro žingsniais. Eidamas palei vamzdį traktoriaus judėjimo kryptimi, ūkininkas suskaičiavo 140 žingsnių, o eidamas priešinga kryptimi – 20 žingsnių. Ūkininko ir traktoriaus greičiai pastovūs. Koks yra vamzdžio ilgis?
A) 30 m **B)** 35 m **C)** 40 m **D)** 48 m **E)** 80 m

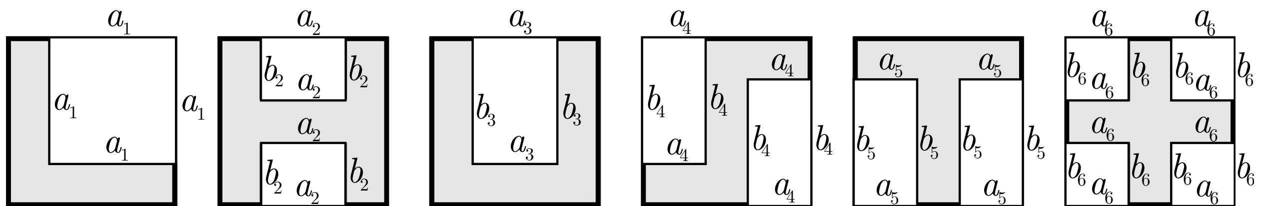
Sprendimai

1. Ⓓ 7

! Perraškyme skirtumą $200013 - 2013 = 200000 - 2000 + 13 - 13 = 2000(100 - 1) = 2000 \cdot 99$. Skaičius $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ dalijasi iš 2 ir 5, o skaičius $99 = 3^2 \cdot 11$ dalijasi iš 3 ir 11. Nei vienas iš jų nesidalija iš 7.

2. Ⓒ 4

! Lyginant perimetro linijų ilgumą, pakanka lyginti tik tas jų dalis, kurios nesutampa. Tas dalis sudarančių atkarpų ilgius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje.



Kai kurių atkarpų ilgiai sutampa, nes jos yra priešingos stačiakampio kraštinės. Kiekvienos figūros (einant iš kairės į dešinę) atveju galioja tokios lygybės ar nelygybės: 1) $2a_1 = 2a_1$; 2) $2a_2 + 4b_2 \neq 2a_2$; 3) $a_3 + 2b_3 \neq a_3$; 4) $2a_4 + 2b_4 = 2a_4 + 2b_4$; 5) $2a_5 + 2b_5 = 2a_5 + 2b_5$; 6) $8a_6 = 8a_6$. Turime keturias lygybes ir keturias figūras, kurių perimetrai lygūs lapelio perimetrui.

3. Ⓒ 2,80 Lt

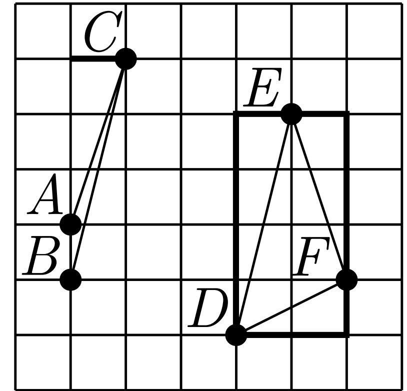
! Ponia Aurelija nupirko $4 \cdot 4 = 16$ burbuolių. Iš jų nemokamos buvo 6-oji ir 12-oji burbuolės, o po 20 centų ponia Aurelija sumokėjo už likusias $16 - 2 = 14$ burbuolių. Todėl ji sumokėjo $14 \cdot 20 = 280$ centų arba $2,80$ Lt.

4. Ⓒ 131

? Tris skaičius iš šešių duotųjų parinkti nesunku: $2 \cdot 4 \cdot 125 = 2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$. Ieškoma suma lygi $2 + 4 + 125 = 131$.

! Įsitikinkime tuo, kad kitaip trijų skaičių parinkti neįmanoma. Jų sandauga 1000 dalijasi iš 5^3, bet ne iš 5^4. Kitaip tariant, turime sudauginti lygiai tris penketus. Jei neimsime skaičiaus 125, tai turėsime imti kitus skaičius, besidalijančius iš 5, t. y. $25 = 5^2$ arba $50 = 2 \cdot 5^2$. Tačiau bet kuris vienas iš jų teturi du penketus, t. y. dalijasi tik iš 25, o du tokie skaičiai jau duoda 4 penketus, jų sandauga dalijasi iš 5^4. Vadinasi, turime imti skaičių 125. Likusių dviejų skaičių sandauga lygi $1000 : 125 = 8$. Ją gausime tik sudauginę du mažiausius skaičius 2 ir 4.

5. (C) $\frac{1}{2}$



! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Riebesnėmis linijomis pažymėkime trikampio ABC aukštinę ir stačiakampį, į kurį įbrėžtas trikampis DEF. Raskime trikampių ABC ir DEF plotus.

Trikampio ABC plotas lygus pusei pagrindo AB ir aukštinės sandaugos: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

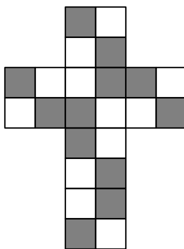
Stačiakampį DEF, kurio plotas yra $4 \cdot 2 = 8$, sudaro trikampis DEF ir trys statieji trikampiai, kurių plotai yra $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$, $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Tad trikampio DEF plotas lygus $8 - 2 - \frac{3}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$.

Žinoma, ir iš „iš akies" buvo galima nustatyti, kad trikampio DEF plotas didesnis nei trikampio ABC. Taip pat „iš akies" patikrinus visus ar bent daugelį trikampių, kurių plotai mums rūpi, nesunku nuspėti, kad trikampio ABC plotas ir yra mažiausias. Bet šį ploto skaičiavimo pavyzdį čia pateikėme, kad būtų lengviau pastebėti dėsningumą, dėl kurio mažensio ploto trikampio negausime ne tik šiuo atveju, bet ir jokiu atveju, jei tik taškus žymime languoto popieriaus langelių viršūnėse.

Juk aplink bet kokį trikampį su tokiomis viršūnėmis galima apibrėžti stačiakampį, einantį per trikampio viršūnes ir ribojantį stačiakampę sritį, sudarytą iš vienetinių langelių. Jo plotas bus sveikasis skačius. Tą stačiakampį sudarys pradinis trikampis drauge su stačiaisiais trikampiais, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Stačiųjų trikampių plotai bus sveikieji skaičiai, padalyti iš 2, tad ir pradinio trikampio plotas, gaunamas tuos plotus atėmus iš stačiakampio ploto, bus sveikasis skaičius, padalytas iš 2. Vadinasi, mažesnio ploto nei $1 : 2 = \frac{1}{2}$ trikampis turėti negali.

6. (E) 2^{31}

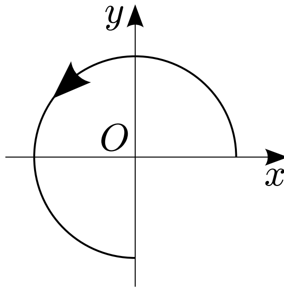
! Abu dėmenys patys yra dvejeto laipsniai: $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{2 \cdot 15} + 2^{3 \cdot 10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{30+1} = 2^{31}$.

7. (E) 

! Kiekvienoje kubo sienoje yra po du baltus ir du juodus langelius (kitaip nei atsakyme B). Jokioje sienoje tos pačios spalvos langeliai neturi bendros kraštinės (kitaip nei atsakymuose A ir D). Pagaliau pastebėkime, kad bendrą kraštinę turintys, bet skirtingose sienose esantys langeliai yra visada tos pačios spalvos (kitaip nei atsakyme C). Jei pradėsime dažyti išklotinę nuo bet kurios sienos, ir kiekvieną sieną nudažysime pagal išvardytas taisykles, tai gausime tokį vaizdą, kaip atsakyme E.

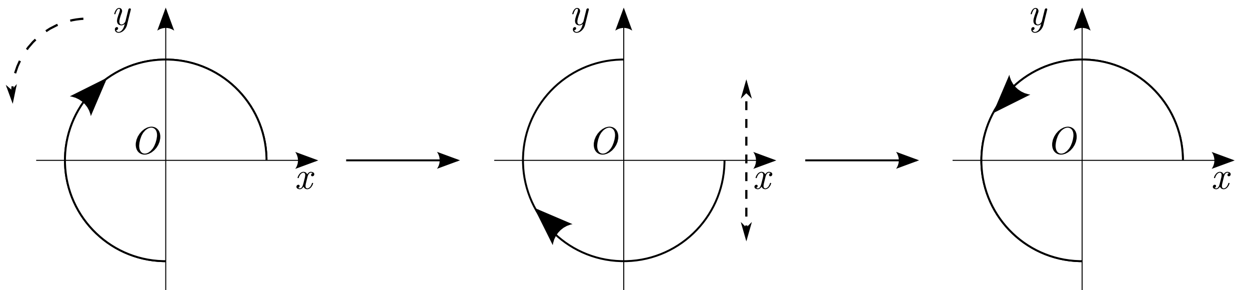
8. (C) 896

! Skaičiaus 4 kartotiniai yra $4, 8, 12, ..., 96, 100, 104, 108, ..., 992, 996, 1000, ...$ Ieškomas skirtumas lygus $996 - 100 = 896$.



9. (D)

! Po posūkio rodyklė atsiduria III koordinačių ketvirtyje, bet jos kryptis nepakinta (žr. pav.). O po atspindėjimo rodyklė grįžta į II ketvirtį, bet ima rodyti kryptį prieš laikrodžio rodyklę.



10. (C) $20 \cdot \sqrt{13}$

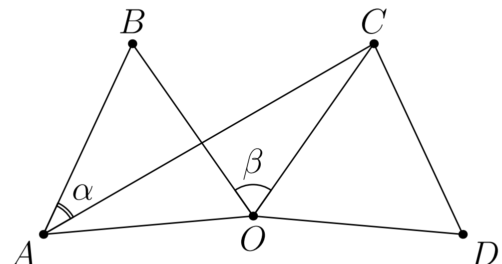
! Dėl patogumo visus skaičius pakelkime kvadratu:

A) $(\sqrt{20} \cdot \sqrt{13})^2 = 20 \cdot 13 = 260 < 4000$;
B) $(\sqrt{20} \cdot 13)^2 = 20 \cdot 169 < 20 \cdot 200 = 4000$;
C) $(20 \cdot \sqrt{13})^2 = 400 \cdot 13 > 400 \cdot 10 = 4000$;
D) $(\sqrt{201} \cdot 3)^2 = 201 \cdot 9 < 201 \cdot 10 = 2010 < 4000$;
E) $(\sqrt{2013})^2 = 2013 < 4000$.

Didžiausias skaičius yra $20 \cdot \sqrt{13}$.

11. (D) 35°

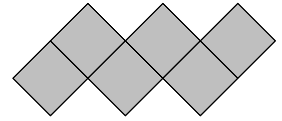
! Trikampiai AOB ir COD yra lygūs tarpusavyje ir lygiakraščiai, todėl $\angle AOB = \angle BAO = 60°$ ir $AO = BO = CO$. Vadinasi, trikampis AOC lygiašonis ir $\angle CAO = \angle ACO$.



Dabar šiuos kampus galime rasti, užrašę trikampio kampų sumą. Kadangi $180° = \angle CAO + \angle ACO + \angle AOC = \angle CAO + \angle CAO + (\angle AOB + \angle BOC) = 2\angle CAO + 60° + 70° = 2\angle CAO + 130°$, tai $\angle CAO = \frac{180° - 130°}{2} = 25°$.

Pagaliau randame $\alpha = \angle BAC = \angle BAO - \angle CAO = 60° - 25° = 35°$.

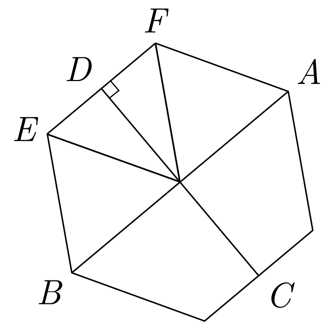
12. (B) 4028



! Perimetro liniją sudaro tarpusavyje nesuglaustos langelių kraštinės. Kiekviena iš jų yra vienetinio ilgio, tad belieka rasti tokių kraštinių skaičių. Vien pažvelgus į pateiktą pavyzdį nesunku suvokti, kad kiekvieno langelio, išskyrus du kraštinius, lygiai dvi kraštinės yra suglaustos su kitomis ir dvi nėra. Iš tiesų kiekvienas iš $2013 - 2 = 2011$ langelių yra suglaustas su dviem gretimais, tik kraštiniai langeliai turi po vieną kaimyninį, todėl po tris su kitomis nesuglaustas kraštines. Gauname perimetrą $2011 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4028$.

13. (D) 80

! Čia neįrodinėsime gerai žinomų ir intuityviai nesunkiai suprantamų taisyklingojo daugiakampio savybių. Kiekvienas taisyklingasis daugiakampis turi centrą – tai yra apie jį apibrėžto apskritimo centras. Jei iš to centro į daugiakampio viršūnes išvesime atkarpas, tai jos bus lygios ir dalys daugiakampį į lygius lygiašonius trikampius. Be to, jei taisyklingasis daugiakampis turi lyginį viršūnių skaičių, tai galime kalbėti apie daugiakampio priešingas viršūnes ir priešingas kraštines. Įstrižainės, jungiančios priešingas viršūnes, eina per centrą ir centras jas dalija pusiau. Priešingos kraštinės yra lygiagrečios, o jų vidurius jungianti atkarpa yra joms statmena, eina per centrą ir jis ją taip pat dalija pusiau. Norint išspręsti šį uždavinį, viso to iš anksto žinoti nebūtina – tai nėra sunku atspėti žiūrint į brėžinį, pastebint jo simetriškumą.

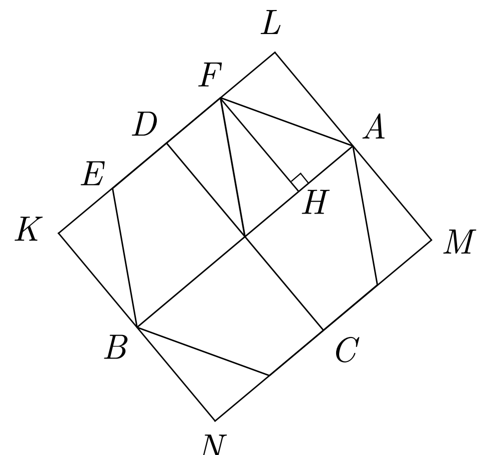


Vadinasi, duotojo šešiakampio centras yra atkarpų AB ir CD sankirta O, dalijanti kiekvieną iš jų pusiau, atkarpa CD yra statmena šešiakampio kraštinei EF, o atkarpa AB – su ja lygiagreti (žr. pav.; todėl ir AB su CD tarpusavyje statmenos).

Tašką O sujungėme su šešiakampio kraštinėmis. Taip padalijome jį į šešis lygius lygiašonius trikampius. Kadangi $360°$ kampą su viršūne O padalijome į šešis lygius kampus, tai tų kampų dydžiai lygūs $360° : 6 = 60°$. Vadinasi, tada ir kiti du kiekvieno lygiašonio trikampio kampai lygūs po $\frac{180°-60°}{2} = 60°$. Šeši trikampiai ne tik lygiašoniai, bet ir lygiakraščiai (todėl $OB = OE = EF$). Kadangi trikampiai lygūs, tai kiekvieno iš jų plotas yra $60 : 6 = 10$.

Kita vertus, trikampio OEF plotas lygus pusei kraštinės ir į ją nuleistos aukštinės sandaugos $\frac{1}{2}(OD \cdot EF)$. Pasinaudokime tuo, kad atkarpos AB ir CD dalija viena kitą pusiau: $10 = \frac{1}{2}(OD \cdot EF) = \frac{1}{2}((\frac{1}{2}CD) \cdot OB) = \frac{1}{2}((\frac{1}{2}CD) \cdot (\frac{1}{2}AB)) = \frac{1}{8}(AB \cdot CD)$. Taip randame $AB \cdot CD = 8 \cdot 10 = 80$.

!! Jei per taškus C ir D nubrėšime tieses, lygiagrečias su atkarpa AB, o per A ir B – tieses, lygiagrečias su atkarpa CD, tai tos tiesės kirsis statmenai (nes atkarpos AB ir CD pačios stamenos). Besikirsdamos tiesės iškirs viena kitoje atkarpas, sudarančias keturkampį su stačiais kampais, t. y. stačiakampį $KLMN$ (žr. pav.). Trys lygiagrečios atkarpos KN, LM ir CD yra lygios, nes būdamos statmenos tiesėms KL ir MN, visos yra lygios atstumui tarp šių lygiagrečių tiesių. Taip pat lygios yra ir atkarpos KL, MN ir AB. Taigi stačiakampio krašinės lygios AB ir CD, o plotas yra $AB \cdot CD$.



Kaip ir ! dalyje, trikampio OFA plotas lygus $60 : 6 = 10$. Aukštinė FH šį lygiakraštį trikampį dalija į dvi lygias dalis, kurių plotas yra $10 : 2 = 5$. Stačiakampį $AHFL$ jo įžambinė taip pat dalija į dvi lygias dalis. Kadangi trikampio AFH plotas yra 5, tai ir trikampio AFL plotas yra 5. Stačiakampį $KLMN$ sudaro pradinis šešiakampis ir keturi trikampiai, kurių kiekvieno plotas, lygus 5, randamas taip pat. Viso stačiakampio plotas lygus $AB \cdot CD = 60 + 4 \cdot 5 = 80$.

14. (D) 60%

! Tarkime, kad klasėje yra b berniukų ir m mergaičių, iš viso $b+m$ vaikų. Mergaičių dalis klasėje lygi $\frac{m}{b+m} \cdot 100\%$.
Visų mokinių surinktą pažymių sumą pažymėkime s. Klasės pažymių vidurkis lygus $\frac{s}{b+m}$. Jei kievienas berniukas gautų 3 balais daugiau, tai pažymių suma padidėtų $3b$ ir būtų lygi $s + 3b$, o naujas vidurkis būtų lygus $\frac{s+3b}{b+m}$. Sudarykime lygtį:

$$\frac{s+3b}{b+m} = \frac{s}{b+m} + 1,2.$$

Pertvarkykime ją:

$$\frac{s+3b}{b+m} - \frac{s}{b+m} = 1,2, \qquad \frac{s+3b-s}{b+m} = 1,2,$$

$$\frac{3b}{b+m} = 1,2, \qquad \frac{b}{b+m} = 0,4,$$

$$1 - \frac{b}{b+m} = 1 - 0,4, \qquad \frac{m}{b+m} = 0,6.$$

Taigi mergaitės sudaro $0,6 \cdot 100\% = 60\%$ mokinių.

15. (D) D

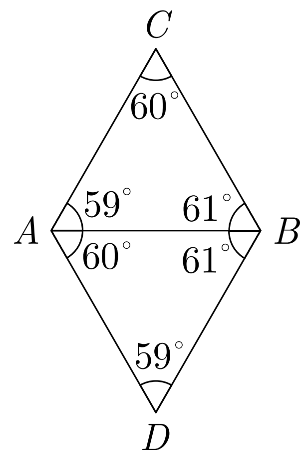
! Pažymėkime taškų koordinates $A(x_1; y_1)$ ir $C(x_2; y_2)$. Kadangi taškai A ir B priklauso tai pačiai horizontaliai tiesei (arba tam pačiam statmeniui, nuleistam į Oy ašį), tai jų koordinatė y yra ta pati. Be to, sutampa taškų C ir D koordinatė y, taškų A ir D koordinatė x, taškų B ir C koordinatė x. Todėl galime taip užrašyti taškus: $B(x_2; y_1)$ ir $D(x_1; y_2)$.
III ketvirčio taškų koordinatės yra neigiamos. Kuo taškas yra dešiniau, tuo jo koordinatė x didesnė. Kuo taškas yra aukščiau, tuo jo koordinatė y didesnė. Todėl $x_1 < x_2 < 0$ ir $y_1 < y_2 < 0$. Jei imsime neigiamų skaičių modulius, tai nelygybės apsivers: $|x_1| > |x_2| > 0$ ir $|y_1| > |y_2| > 0$.
Taškus A, B, C, D atitinka santykiai $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_2}{x_1}$. Šie neigiamų skaičių santykiai bus teigiami skaičiai, todėl nepakis, jei paimsime jų modulius: $\frac{|y_1|}{|x_1|}, \frac{|y_1|}{|x_2|}, \frac{|y_2|}{|x_2|}, \frac{|y_2|}{|x_1|}$.
Dabar, nagrinėjant vien teigiamus skaičius, nesunku suvokti, kuris santykis mažiausias: turime imti kuo mažesnį skaitiklį ir kuo didesnį vardiklį. T. y. skaičius bus mažesnis, jei imsime $|y_2|$, o ne $|y_1|$, ir $|x_1|$, o ne $|x_2|$. Santykis $\frac{|y_2|}{|x_1|}$ atitinka tašką D.

16. (D) 1952

! Kad rastume visas skaičiaus išskaidymo į du dauginamuosius galimybes, išskaidykime jį maksimaliai, užrašykime skaičių 2013 kaip pirminių skaičių sandaugą: $2013 = 3 \cdot 671 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Skaičiai $3, 11, 61$ yra pirminiai, jų neišskaidysi į mažesnius dauginamuosius. Iš jų reikia gauti tėvo ir sūnaus amžių. Imkime didžiausią iš trijų skaičių 61. Iš jo dalijasi arba tėvo, arba sūnaus amžius, kitaip juos sudauginę negausime 2013. Jei tai yra sūnaus amžius, tai tėvui lieka daugiausiai $3 \cdot 11 = 33$ metai. Bet $33 < 61$, taip būti negali, nes tėvas vyresnis už sūnų. Vadinasi, tėvo amžius dalijasi iš 61. Tačiau jei jis nėra lygus 61 metams, tai tų metų yra mažiausiai $61 \cdot 3 = 183$, o juk žmonės tiek negyvena. Todėl ponui Jonui yra 61 metai, o jo sūnui yra $2013 : 61 = 33$ metai. Ponas Jonas gimė $2013 - 61 = 1952$-aisiais metais.

17. (A) AD

! Raskime nepažymėtus trikampių kampus (žr. pav.): $\angle ABD = 180° - 59° - 60° = 61°$; $\angle BAC = 180° - 61° - 60° = 59°$. Matome, kad abu trikampiai turi tuos pačius kampus $59°, 60°, 61°$. Todėl trikampiai yra panašūs (bet ne lygūs!).



Trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė. Šią savybę pritaikykime dviem duotiesiems trikampiams. Trikampyje ABD turime $AB < BD < AD$, o trikampyje ABC turime $BC < AB < AC$, nes $59° < 60° < 61°$. Matome, kad ilgiausia atkarpa gali būti tik AD arba AC.

Kad palygintume šias skirtingų trikampių atkarpas, pasinaudokime trikampių panašumu. Panašiųjų trikampių atitinkamos kraštinės proporcingos. Imkime kraštines, esančias prieš 60° ir 61° kampus:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}, \qquad AC = \frac{AB}{BD} \cdot AD < AD.$$

Nelygybę gavome, pasinaudoję jau nustatytu faktu $AB < BD$. Taigi atkarpa AD ilgiausia.

18. (C) 2

! Mažiausiąjį iš penkių skaičių pažymėkime n. Turime skaičius $n, n+1, n+2, n+3, n+4$.

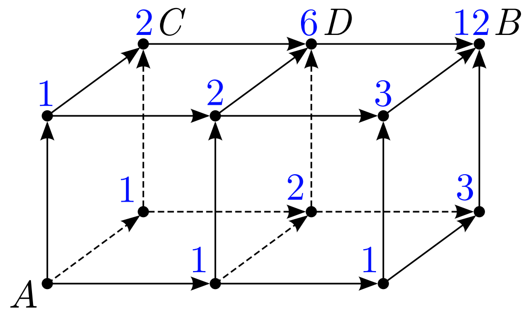
Pastebėkime, kad jau kai $n = 5$, sudėję net tris mažiausius iš penkių skaičių, gausime sumą, didesnę už likusių dviejų: $5 + 6 + 7 = 18 > 8 + 9 = 17$. Tokiu atveju norimos sumų lygybės nepavyks gauti. Jei imsime didesnes n reikšmes, nuo to mažiausias galimas sumų skirtumas tik didės. Iš tiesų jis lygus $n + (n+1) + (n+2) - (n+3) - (n+4) = n - 4$. Kai $n \geq 5$, tas skirtumas $n - 4 \geq 1$, todėl niekada nebus lygus 0.

Reikšmės $n = 2$ ir $n = 4$ tinka: $2 + 3 + 5 = 4 + 6$ ir $4 + 5 + 6 = 7 + 8$.

Reikšmės $n = 1$ ir $n = 3$ netinka. Greičiausias būdas tuo įsitikinti yra pastebėti, kad kai n yra nelyginis, tai visų penkių skaičių suma $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10$ yra nelyginė. Jei dviejų ir trijų skaičių sumos būtų lygios, tarkime, natūraliajam skačiui s, tai sudėję abi sumas gautume, kad nelyginė visų skaičių suma $5n + 10$ lygi lyginiam skaičiui $2s$. Taip negali būti.

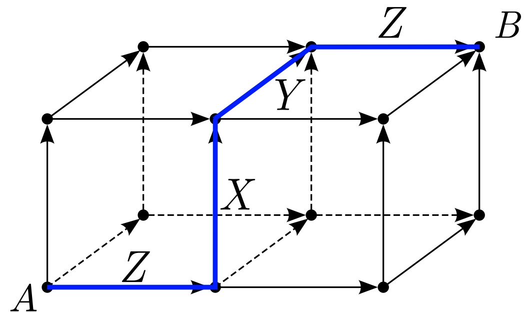
Gavome du skaičių penketus $2, 3, 4, 5, 6$ ir $4, 5, 6, 7, 8$.

19. (D) 12



! Pradėkime nuo taško A ir trijų jam gretimų viršūnių. Iš taško A į kiekvieną iš jų įmanoma patekti vieninteliu būdu, todėl pažymėkime jas skaičiumi 1. Toliau iš eilės nagrinėkime viršūnes, į kurias įmanoma patekti tik iš jau pažymėtųjų, ir prie kiekvienos nurodykime, keliais būdais į ją įmanoma patekti.

Pvz., imkime viršūnę C (žr. pav.). Į ją galima patekti iš dviejų viršūnių, pažymėtų skaičiumi 1: per vieną iš jų vienu būdu, per kitą iš jų vienu būdu, iš viso $1 + 1 = 2$ būdais. Taip pat samprotaudami skaičiumi 2 pažymime dar dvi viršūnes. Dabar nagrinėkime viršūnę D. Į ją galima patekti iš trijų viršūnių, pažymėtų skaičiumi 2: per vieną iš jų dviem būdais, per kitą iš jų dviem būdais, ir dviem būdais per trečią, iš viso $2 + 2 + 2 = 6$ būdais. Kiekvienu atveju užrašomas skaičius lygus gretimų viršūnių, iš kurių į pasirinktą viršūnę eina rodyklės, skaičių sumai. Dar vieną viršūnę pažymime skaičiumi 1, tada dar dvi viršūnes skaičiumi $1 + 2 = 3$. Pagaliau į viršūnę B galima patekti $3 + 3 + 6 = 12$ būdų.



!! Einant pagal rodykles, teks lygiai vieną kartą pakilti kraštine aukštyn (pavadinkime šį žingsnį X), lygiai vieną kartą kraštine teks žengti gilyn iš priekinės pavaizduoto stačiakampio gretasienio sienos į užpakalinę (pavadinkime šį žingsnį Y) ir lygiai du kartus teks kraštine žengti dešinėn (pavadinkime šį žingsnį Z). Visos rodyklės rodo viena iš šių trijų krypčių, o kol atitinkamo žingsnio neatlikome, jį galime atlikti bet kada. Vadinasi, patekimo į tašką B būdus galima sutapatinti su žingsnių X, Y, Z ir dar kartą Z kombinacijomis. Pvz., kombinaciją $ZXYZ$ atitinka kelias nuo A iki B, pavaizduotas paveikslėlyje.

Belieka rasti, keliais būdais galima išrikiuoti keturias raides X, Y, Z, Z. Visų pirma imkime raides ZZ. Raidę X galima prirašyti trimis būdais: XZZ, ZXZ, ZZX. Kiekvienu iš 3 atvejų likusią raidę Y galima prirašyti 4 būdais (įterpti į vieną iš dviejų tarpų, prirašyti pradžioje arba gale). Iš viso gauname $3 \cdot 4 = 12$ būdų.

20. (E) Teiginiai **A**–**D** klaidingi

! Jei šešių skaitmenų sandauga yra nelyginė, tai ir kiekvienas iš skaitmenų yra nelyginis. Šešių nelyginių skaitmenų suma visada lyginė, todėl informacija apie skaitmenų sumą yra bereikšmė. Ja šiame uždavinyje sąmoningai bandoma supainioti.

Kadangi nelyginiai yra lygiai šeši skaičiaus skaitmenys, o lyginio nei vieno, tai teiginiai A ir C negali būti teisingi.

Skaičius 111111 tenkina uždavinio sąlygą, todėl klaidingas ir teiginys B.

Iš viso tėra penki nelyginiai skaitmenys $1, 3, 5, 7, 9$, tad šešių skirtingų skaitmenų skaičius negali turėti. Todėl visada klaidingas yra ir teiginys D.

Pirmieji keturi teiginiai klaidingi.

21. (C) 13

! Kad nereiktų dalyti kampu, padarykime, kad vardiklyje būtų skaičiaus 10 laipsnis. Mums padeda tai, kad vardiklis dalijasi tik iš pirminių skaičių 2 ir 5, kurie yra skaičiaus 10 dalikliai:

$$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{1024 \cdot 1000} = \frac{1}{2^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{5^{10} \cdot 2^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{10^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{10^{13}}.$$

Dalyti natūralųjį skaičių iš skaičiaus 10 laipsnio 10^n jau paprasta: tiesiog parašome kablelį prieš n-ąjį skaitmenį iš dešinės (jei dalinys neturi pakankamai skaitmenų, prieš jį parašoma tiek nulių, kiek jų trūksta, kad skaičius turėtų $n+1$ skaitmenį). Gauname n skaitmenų po kablelio, bet jų gali sumažėti, jei dalinys baigiasi vienu ar keliais nuliais. Juos tada tiesiog turėtume nubraukti, kad paskutinis skaitmuo būtų nenulinis.

Daugindami natūralųjį skaičių, besibaigiantį skaitmeniu 5, iš 5, vėl gausime skaičių, besibaigiantį skaitmeniu 5. Todėl trupmenos skaitiklis 5^{10} baigiasi skaitmeniu 5, o ne 0, ir padalijęs jį iš 10^{13} gausime 13 skaitmenų po kablelio, iš kurių paskutinis bus lygus 5, o ne 0.

22. (D) 6

! Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Jis dalijasi iš skaičiaus $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ (3, 11, 61 yra pirminiai skaičiaus 2013 dalikliai). Todėl skaičių n galime užrašyti pavidalu $n = 3^a \cdot 11^b \cdot 61^c \cdot m$, čia a, b, c, m yra natūralieji skaičiai ir skaičius m nesidalija nei iš 3, nei 11 ar 61. T. y. $3^a, 11^b, 61^c$ yra maksimalūs pirminių skaičių laipsniai, iš kurių dalijasi skaičius n.

Imkime bet kokį natūralųjį skaičių n_1. Jį taip pat galima užrašyti pavidalu $n_1 = 3^{a_1} \cdot 11^{b_1} \cdot 61^{c_1} \cdot m_1$, čia a, b, c yra neneigiami sveikieji skaičiai ir natūralusis skaičius m_1 nesidalija nei iš 3, nei 11 ar 61. Skaičiai a_1, b_1, c_1 gali būti lygūs 0, nes skaičius n_1 nebūtinai dalijasi iš 3, 11 ar 61. Skaičius n_1 yra skaičiaus n daliklis tada ir tik tada, jei $n : n_1 = 3^{a-a_1} \cdot 11^{b-b_1} \cdot 61^{c-c_1} \cdot \frac{m}{m_1}$ yra sveikasis skaičius. Taip yra tada ir tik tada, kai $0 \le a_1 \le a, 0 \le b_1 \le b, 0 \le c_1 \le c$, o m dalijasi iš m_1. Kiek galimybių mes turime taip parinkti skaičių? Skaičius a_1 gali įgyti $a+1$ reikšmę, skaičius b_1 – $b+1$ reikšmę, skaičius c_1 – $c+1$ reikšmę, o skaičius m_1 – tiek reikšmių, kiek skaičius m turi daliklių. Jei skaičius m turi d daliklių, tai iš viso turime $(a+1)(b+1)(c+1)d$ galimybių.

Nagrinėkime lygybę $(a+1)(b+1)(c+1)d = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Turime $a+1, b+1, c+1 \ge 1+1 = 2$. Jei ir $d \ge 2$, tai kairėje pusėje turime bent keturis nevientinius daugiklius, o dešinėje net maksimaliai išskaidę skaičių į pirminius skaičius, teturime tris nevienetinius daugiklius. Vadinasi, $d = 1$ ir skaičius m teturi vieną daliklį. Tačiau kiekvienas natūralusis skaičius dalijasi iš 1 ir iš savęs paties ir šie du dalikliai sutampa, tik kai tas skaičius lygus 1. Taigi $m = 1$.

Belieka rasti kiek natūraliųjų sprendinių turi lygtis $(a+1)(b+1)(c+1) = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Dešinėje turime vienintelį išskaidymą į tris nevienetinius daugiklius, gali skirtis tik jų tvarka. Todėl trys kairės pusės daugikliai turi tam tikra tvarka sutapti su dešinės pusės daugikliais. Gauname šešias galimybes ir šešis uždavinio sąlygą tenkinačius skačius:

1) $a+1 = 3, b+1 = 11, c+1 = 61$ ir $n = 3^2 \cdot 11^{10} \cdot 61^{60}$;
2) $a+1 = 3, b+1 = 61, c+1 = 11$ ir $n = 3^2 \cdot 11^{60} \cdot 61^{10}$;
3) $a+1 = 11, b+1 = 3, c+1 = 61$ ir $n = 3^{10} \cdot 11^2 \cdot 61^{60}$;
4) $a+1 = 11, b+1 = 61, c+1 = 3$ ir $n = 3^{10} \cdot 11^{60} \cdot 61^2$;
5) $a+1 = 61, b+1 = 3, c+1 = 11$ ir $n = 3^{60} \cdot 11^2 \cdot 61^{10}$;
6) $a+1 = 61, b+1 = 11, c+1 = 3$ ir $n = 3^{60} \cdot 11^{10} \cdot 61^2$.

23. Ⓒ 3

! Tarkime, kad Linas suglaudė m trikampių, o mažiausias bendraviršūnis kampas turi n laipsnių. Tada bendraviršūniai kampai turės po $n, 2n, 3n, ..., mn$ laipsnių. Sudėję juos, gausime pilnąjį kampą 360°. Turime lygybę $n + 2n + 3n + ... + mn = 360$. Jos kairiajai pusei pritaikykime aritmetinės progresijos sumos formulę: $n+2n+3n+...+mn = n(1+2+3+...+m) = n\cdot\frac{m(m+1)}{2}$.

Iš eilės tikrinkime mažiausias n reikšmes.

Kai $n = 1$, tai $\frac{m(m+1)}{2} = 360$. Pertvarkę lygtį matome, kad tai yra kvadratinė lygtis: $m^2+m-720 = 0$. Jos diskriminantas $D = 1 + 4 \cdot 720 = 2841 = 3 \cdot 947$ dalijasi iš 3, bet ne iš 9, todėl iš jo ištraukta šaknis, o kartu ir lygties šaknys nėra sveikieji skaičiai. Kad lygtis $\frac{m(m+1)}{2} = 360$ neturi natūraliųjų sprendinių (juk tik jie mums rūpi), galima pastebėti ir kitaip. Kai $m \leq 26$, tai $\frac{m(m+1)}{2} \leq \frac{26\cdot27}{2} = 13 \cdot 27 < 360$. O kai $m \geq 27$, tai $\frac{m(m+1)}{2} \geq \frac{27\cdot28}{2} = 14 \cdot 27 > 360$.

Kai $n = 2$, tai $m(m + 1) = 360$ arba $m^2 + m - 360 = 0$. Diskriminantas $D = 1 + 4 \cdot 360 = 1441 = 11 \cdot 131$ dalijasi iš 11, bet ne iš $11^2 = 121$, todėl iš jo ištraukta šaknis, o kartu ir lygties šaknys nėra sveikieji skaičiai. Kad lygtis $m(m+1) = 360$ neturi natūraliųjų sprendinių, galima pastebėti ir kitaip. Kai $m \leq 18$, tai $m(m + 1) \leq 18 \cdot 19 < 360$. O kai $m \geq 19$, tai $m(m + 1) \geq 19 \cdot 20 > 360$.

Kai $n = 3$, tai $3 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 360$ arba $m^2 + m - 240 = 0$. Ši lygtis turi natūraliąją šaknį $m = 15$ (kita šaknis $m = -16$). Vadinasi, įmanoma suglausti 15 trikampių, imant mažiausią bendraviršūnį kampą, lygų 3°.

24. Ⓔ Skaičiaus 2013 negausime

! Iš trejeto 1, 2, 3 gausime trejetą 3, 4, 5, tada 7, 8, 9, tada 15, 16, 17 ir t. t. Gautieji skaičių trejetai yra gretimų natūraliųjų skaičių trejetai. Kas atsitinka su tokiais trejetais $n, n+1, n+2$ po operacijos „SUMOS"? Gauname naują trejetą $n+(n+1), n+(n+2), (n+1)+(n+2)$ arba $2n + 1, 2n + 2, 2n + 3$. Vėl gavome tris gretimus skaičius. Todėl pradėjus nuo trijų gretimų skaičių, skaičiai kiekviename iš gautųjų trejetų bus gretimi. Dar pastebėkime, kad naujojo trejeto skaičiai yra apytiksliai dvigubai didesni. Tiksliau, vietoj vidurinio iš trijų skaičių $n+1$ gauname lygiai dusyk didesnį vidurinį skaičių $2n+2$. Pradinis vidurinis skaičius yra 2. Vietoj jo po pirmos operacijos gausime $2 \cdot 2 = 4$, tada $2 \cdot 4 = 8$, toliau 16, 32, 64 ir t. t.

Kiekviename gautame skaičių trejete vidurinis skaičius bus dvejeto laipsnis. Kiekvienas trejetas turės pavidalą $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$, čia $n = 1, 2, 3, ...$ Bet skaičius 2013 ir jam gretimi skaičiai 2012 bei 2014 yra tarp dvejeto laipsnių $2^{10} = 1024$ ir $2^{11} = 2048$, nei vienas iš jų pats nėra dvejeto laipsnis. Todėl skaičius 2013 jokiam skaičių trejetui, kurį gausime atlikdami operaciją, nepriklausys.

25. Ⓑ 15

? Tarkime, surašius skaičius tam tikra tvarka $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$, mažiausioji iš sumų $s_1 = x_1 + x_2 + x_3, s_2 = x_2 + x_3 + x_4, ..., s_{10} = x_{10} + x_1 + x_2$ lygi s.

Bandykime įvertinti s. Kievienas iš ratu surašytų skaičių panaudotas skaičiuojant lygiai tris iš sumų. Todėl jei sudėsime visas 10 sumų, tai gausime skaičių $s_1 + s_2 + ... + s_{10} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + ... + 10 \cdot 3 = (1 + 2 + ... + 10) \cdot 3 = 55 \cdot 3 = 165$. Kita vertus, kiekviena suma ne mažesnė už s, todėl visų 10 sumų suma $165 = s_1 + s_2 + ... + s_{10} \geq 10s$. Gauname $16{,}5 \geq s$, tad $s \leq 16$.

Galima rasti pavyzdį, kur $s = 15$. Pvz., surašykime skaičius ratu tokia tvarka: $1, 5, 9, 7, 2, 6, 8, 3, 4, 10$. Gauname tokias sumas: $15, 21, 18, 15, 16, 17, 15, 17, 15, 16$. Reikšmės $s = 16$ gauti nepavyks, tad natūralu spėti, kad $s = 15$ yra didžiausia galima reikšmė.

! Sunkiausia uždavinio dalis yra įsitikinti, kad neįmanoma gauti $s = 16$. Tam reikia bandyti kiek griežčiau įvertinti 10 sumų. Pastebėkime, kad dvi gretimos trijų skaičių sumos negali būti lygios. Pvz., jei $s_2 = s_3$, tai $x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5$ ir $x_2 = x_5$. Lygiai taip pat $s_1 \neq s_2, s_3 \neq s_4, s_4 \neq s_5, ..., s_9 \neq s_{10}, s_{10} \neq s_1$. Tai reiškia, kad jei kuri nors suma lygi s, tai jai gretimos sumos jau ne mažesnės nei $s + 1$.

Tarkime, kad $s = 16$. Tada bent viena iš sumų s_1 ir s_2 ne mažesnė už 17, bent viena iš sumų s_3 ir s_4 ne mažesnė už 17, $\ldots$, bent viena iš sumų s_9 ir s_{10} ne mažesnė už 17. Vadinasi, $s_1 + s_2 \geq 16 + 17 = 33, s_3 + s_4 \geq 16 + 17 = 33, ..., s_9 + s_{10} \geq 16 + 17 = 33$. Jei bent viena iš šių penkių nelygybių yra griežta, tai $165 = s_1 + s_2 + ... + s_{10} > 33 \cdot 5 = 165$. Todėl visos šios nelygybės yra lygybės: $s_1 + s_2 = 16 + 17, s_3 + s_4 = 16 + 17, ..., s_9 + s_{10} = 16 + 17$. Kiekvienoje sumų poroje viena suma lygi 16, o kita 17.

Jei $s_1 = s_4 = 16$ arba 17, tai $s_2 = s_3 = 17$ arba 16. Jau minėjome, kad dvi gretimos sumos negali būti lygios, todėl $s_1 \neq s_4$. Analogiškai $s_2 \neq s_5$. Vadinasi, $s_1 + s_4 = 16 + 17$ ir $s_2 + s_5 = 16 + 17$. Nagrinėkime reiškinį $(s_1 - s_2) + (s_4 - s_5) = ((x_1 + x_2 + x_3) - (x_2 + x_3 + x_4)) + ((x_4 + x_5 + x_6) - (x_5 + x_6 + x_7) = (x_1 - x_4) + (x_4 - x_7) = x_1 - x_7$. Jis lygus $(s_1 - s_2) + (s_4 - s_5) = (s_1 + s_4) - (s_2 + s_5) = (16 + 17) - (16 + 17) = 0$. Gavome prieštarą. Tad $s \neq 16$.

26. (D) 10

! Visų 11 natūraliųjų skaičių gauti nepavyks. Iš tiesų skaičius 17 nedalija jokio iš kitų skaičių, o pats dalijasi tik iš skaičiaus 1. Todėl jis turėtų būti vienoje poroje su skaičiumi 1. Bet tas pats galioja ir kitam dideliam pirminiam skaičiui 19. Jis taip pat turi būti vienoje poroje su skaičiumi 1, bet šis jau „užimtas".

Nėra sunku rasti tokį skaičių suskirstymą į poras, kad gautume 10 natūraliųjų skaičių. Nepatogiausius skaičius 17 ir 19 sudėkime į vieną porą. Dar vieną didelį pirminį skaičių 13 esame priversti poruoti su skaičiumi 1. O pirminį skaičių 11 jau galime suporuoti su skaičiumi 22. Didesniuosius lyginius skaičius stenkimės poruoti su dvigubai mažesniais. Vienas iš galimų variantų yra toks:

$$\frac{22}{11} = 2, \frac{21}{7} = 3, \frac{20}{10} = 2, \frac{19}{17}, \frac{18}{9} = 2, \frac{16}{8} = 2,$$
$$\frac{15}{5} = 3, \frac{14}{2} = 7, \frac{13}{1} = 13, \frac{12}{4} = 3, \frac{6}{3} = 2.$$

27. (C) 91

! Jungiant bet kurias tris trylikakampio viršūnes, iš viso galima gauti $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 22$ trikampių (derinių skaičius). Nustatykime, kiek tokiu būdu galima gauti trikampių, netenkinančių uždavinio sąlygos.
Apie trylikakampį apibrėžkime apskritimą. Jo centras sutaps su trylikakampio centru. Pasirinkime dvi trylikakampio viršūnes A ir B. Jos dalija apskritimą į du nelygius lankus (iš likusių $13 - 2 = 11$ viršūnių trumpesniajam priklausys daugiausiai 5, o didesniajam $-$ bent 6 lygiais tarpais išsidėsčiusios viršūnės). Pasirinkime trečią trylikakampio viršūnę ir gausime trikampį ABC. Jei C priklausys trumpesniajam lankui, tai kampas ACB remsis į ilgesnįjį lanką, kurio ilgis viršija pusę apskritimo ilgio, ir bus bukasis. Jei C priklausys ilgesniajam lankui, tai kampas ACB remsis į trumpesnįjį lanką ir bus smailusis.

Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra trikampio viduje tada ir tik tada, kai trikampis yra smailusis. Tad jei norime gauti trikampį, netenkinantį uždavinio sąlygos, turime gauti bukąjį trikampį: taip parinkti trylikakampio viršūnes, kad viena iš jų priklausytų trumpesniajam iš tų lankų, į kuriuos apibrėžtąjį apskritimą dalija kitos dvi viršūnės. Mums reikia nustatyti, keliais būdais tai galima padaryti.

Pirmiau rinkimės trikampio ABC kraštinę AB, o tada trečiąją trikampio viršūnę C taip, kad kampas ACB būtų bukasis. Kiekviena apibrėžtojo apskritimo styga AB, jungianti dvi trylikakampio viršūnes A ir B, dalija apskritimą į du lankus, kurių trumpesniajam, neskaitant jo galų A ir B, priklauso 5, 4, 3, 2, 1 arba 0 trylikakampio viršūnių. Kiekvienu atveju būdų stygai AB parinkti bus 13 (imame bet kurią vieną iš 13 viršūnių, o antrąją parenkame vienareikšmiškai kaip esančią už atitinkamai 5, 4, 3, 2, 1 arba 0 viršūnių pagal laikrodžio rodyklę). Kiekvienu atveju pasirinkti trečiąją viršūnę C trumpesniajame lanke bus atitinkamai 5, 4, 3, 2, 1 arba 0 būdų. Iš viso gauname $13 \cdot (5+4+3+2+1+0) = 13 \cdot 15$ būdų.

Trikampių, tenkinačių uždavinio sąlygą, skaičius lygus $13 \cdot 22 - 13 \cdot 15 = 13 \cdot 7 = 91$.

28. Ⓒ 75 km/h

! Automobilis, išvažiavęs k valandų vėliau už pirmąjį, važiuoja $(50+k)$ km/h greičiu (kas valandą išvažiuojančių automobilų greitis didėja po 1 km/h). Čia $k = 0, 1, 2, ..., 50$. Praėjus 100 valandų nuo pirmojo automobilio išvykimo automobilis, praleidęs pirmąsias k valandų, važiavo $100-k$ valandų ir todėl nuvažiavo $(100-k)(50+k) = -k^2 + 50k + 5000$ kilometrų.

Mums rūpi automobilis, spėjęs nuvažiuoti didžiausią atstumą. Su kuria iš reikšmių $k = 0, 1, 2, ..., 50$ kvadratinė funkcija $-k^2+50k+5000$ įgyja didžiausią reikšmę? Tai galima nustatyti ištiriant jos grafiką (parabolę). Kitas būdas būtų išskirti pilnąjį kvadratą: $-k^2+50k+5000 = -(k^2-50k)+5000 = -(k^2 - 2 \cdot 25k + 25^2 - 25^2) + 5000 = -(k-25)^2 + 25^2 + 5000 = -(k-25)^2 + 5625$. Matome, kad funkcija įgyja didžiausią reikšmę, kai kvadratas $(k-25)^2$ įgyja mažiausią galimą reikšmę 0. Taip nutiks, kai $k = 25$. Gauname ieškomą automobilio greitį $50 + k = 75$ km/h.

29. Ⓒ 52

! Sunumeruokime medžius iš eilės nuo 1-ojo iki 100-ojo.

Pasirinkime pirmuosius 6 medžius, tada 6 medžius praleiskime ir pasirinkime 6 medžius nuo 13-ojo iki 18-ojo, tada vėl 6 medžius praleiskime ir pasirinkime 6 medžius nuo 25-ojo iki 30-ojo, ir t. t. Įsisitikinkime tuo, kad visi šie medžiai gali būti ąžuolai. Jei du medžiai priklauso tam pačiam gretimų medžių šešetui, tai tarp jų ne daugiau nei 4 medžiai. Jei du medžiai priklauso skirtingiems šešetams, tai tarp jų mažiausiai 6 medžiai. Kiekgi pasirinkome medžių? Pirmieji 96 medžiai pasidalija į $96 : 6 = 16$ šešetų. Mes pasirinkome kas antrą iš jų, taigi pasirinkome pusę visų šių medžių arba $96 : 2 = 48$ medžius. Be to, pasirinkome nepilną 17-ąjį „šešetą" iš paskutiniųjų keturių medžių. Iš viso turime 52 medžius, kurie visi gali būti ąžuolai.

Įrodykime, kad daugiau ąžuolų būti negali. Imkime bet kuriuos 12 iš eilės einančių medžių. Sunumeruokime juos iš eilės nuo 1-ojo iki 12-ojo ir suskirstykime juos į 6 poras: 1-ąjį ir 7-ąjį, 2-ąjį ir 8-ąjį, ..., 6-ąjį ir 12-ąjį. Kiekvienoje poroje tarp medžių yra lygiai penki kiti, todėl kiekvienoje poroje yra daugiausiai vienas ąžuolas. Taigi ąžuolai sudaro daugiausiai pusę visų 12 medžių. Dabar vėl imkime pirmuosius 96 medžius ir suskirstykime juos į $96 : 12 = 8$ gretimų medžių tuzinus. Kiekviename tuzine ne daugiau nei pusė medžių yra ąžuolai, todėl ir tarp 96 medžių bus daugiausiai $96 : 2 = 48$ ąžuolai. Dar nepaminėjome 4 paskutiniųjų medžių. Kartu su jais iš viso gali būti daugiausiai $48 + 4 = 52$ ąžuolai.

30. Ⓑ 35 m

! Ieškomą vamzdžio ilgį metrais pažymėkime l. Ūkininko greitį pažymėkime v_u (m/s), o traktoriaus – v_t (m/s).

Kai ūkininkas pradėjo eiti palei vamzdį jo judėjimo kryptimi, iki antrojo vamzdžio galo jį skyrė atstumas l (m), jis judėjo greičiu v_u (m/s), o antrasis vamzdžio galas – ta pačia kryptimi greičiu v_t (m/s). Kai du objektai juda ta pačia kryptimi, juos skiriantis atstumas kinta taip pat, kaip jis kistų vienam iš objektų nejudant, o kitam judant greičiu, lygiu jo ir kito objekto greičių skirtumui. Todėl ūkininkas antrąjį vamzdžio galą pasivijo per laiką $\frac{l}{v_u - v_t}$ (s). Per šį laiką ūkininkas nuėjo $\frac{l}{v_u - v_t} \cdot v_u$ metrų ir tiek pat žingsnių.

Kai ūkininkas pradėjo eiti palei vamzdį priešinga kryptimi, iki antrojo vamzdžio galo jį skyrė atstumas l (m), jis judėjo greičiu v_u (m/s), o antrasis vamzdžio galas – priešinga kryptimi greičiu v_t (m/s). Kai du objektai juda priešingomis kryptimis, juos skiriantis atstumas kinta taip pat, kaip jis kistų vienam iš objektų nejudant, o kitam judant greičiu, lygiu jo ir kito objekto greičių sumai. Todėl ūkininkas antrąjį vamzdžio galą pasivijo per laiką $\frac{l}{v_u + v_t}$ (s). Per šį laiką ūkininkas nuėjo $\frac{l}{v_u + v_t} \cdot v_u$ metrų ir tiek pat žingsnių.

Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{l}{v_u - v_t} \cdot v_u = 140, \\ \frac{l}{v_u + v_t} \cdot v_u = 20. \end{cases}$$

Išsireikškime iš abiejų lygčių l:

$$\begin{cases} l = 140 \frac{v_u - v_t}{v_u} = 140(1 - \frac{v_t}{v_u}), \\ l = 20 \frac{v_u + v_t}{v_u} = 20(1 + \frac{v_t}{v_u}). \end{cases}$$

Dabar iš abiejų lygčių išsireikškime $\frac{v_t}{v_u}$:

$$\frac{v_t}{v_u} = 1 - \frac{l}{140} = \frac{l}{20} - 1.$$

Išspręskime gautąją lygtį l atžvilgiu:

$$\frac{l}{140} + \frac{l}{20} = 2,$$

$$l \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{20} \right) = 2,$$

$$l = \frac{2}{\frac{1}{140} + \frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{8}{140}} = \frac{2 \cdot 140}{8} = 35 \text{ (m)}.$$

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	C
4	C
5	C
6	E
7	E
8	C
9	D
10	C
11	D
12	B
13	D
14	D
15	D
16	D
17	A
18	C
19	D
20	E
21	C
22	D
23	C
24	E
25	B
26	D
27	C
28	C
29	C
30	B

Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Senjoras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Vytautas Šlenfuktas,	Vilkaviškio „Aušros“ gimnazija,	Vilkaviškio r.,	150,00
Jokūbas Ruibys,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	132,50
Mindaugas Narušis,	Marijampolės Sūduvos gimnazija,	Marijampolės sav.,	122,50
Modestas Urbonas,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	114,75
Eimantas Savickas,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	111,00
Daniel Juranec,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	109,75
Benediktas Laniauskas,	Vilniaus Jono Basanavičiaus gimnazija,	Vilniaus m.,	108,25
Ringaudas Kalinauskas,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	103,25
Augustas Partikas,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	99,75
Aidas Kilda,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	97,00
Ugnius Beinorius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	94,00
Lukas Maciulevičius,	Prienų „Žiburio“ gimnazija,	Prienų r.,	93,75
Arnas Kapustinskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	93,25
Denis Michailovskij,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	92,25
Dominykas Vytautas Jakštonis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	92,25
Gaudrimas Tunkevičius,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	92,25
Amandas Lukošius,	5-oji gimnazija,	Panevėžio m.,	91,25
Žydrūnas Griškevičius,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	91,25
Ieva Stakvilevičiūtė,	Juliaus Janonio gimnazija,	Šiaulių m.,	89,25
Robert Prokopovič,	Jašiūnų „Aušros“ vidurinė mokykla,	Šalčininkų r.,	88,75
Valentinas Čiesiūnas,	Širvintų rajono Gelvonų vidurinė mokykla,	Širvintų r.,	88,75
Simonas Juodis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	88,50
Marijus Ambrozas,	Tauragės „Versmės“ gimnazija,	Tauragės r.,	88,25
Audrius Malelė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	88,00
Justas Brazauskas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	87,75
Daniel Ozarovič,	Maišiagalos Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	87,50
Viktoras Jurkaitis,	Švėkšnos „Saulės“ gimnazija,	Šilutės r.,	87,50
Violeta Januškievič,	Jašiūnų Mykolo Balinskio vidurinė mokykla,	Šalčininkų r.,	87,50
Domantas Matas Mozeris,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	86,00
Justinas Januškevičius,	„Romuvos“ gimnazija,	Šiaulių m.,	85,50
Tauras Žlibinas,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	85,25
Ignas Joniškis,	Ventos gimnazija,	Akmenės r.,	85,00
Julijonas Kikutis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	83,75
Karolis Gricius,	Mažeikių Gabijos gimnazija,	Mažeikių r.,	83,75
Lukas Grinkevičius,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	83,75
Tomas Čerkauskas,	Gerosios Vilties vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	83,75
Edvin Orlov,	Abraomo Kulviečio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	83,50
Justas Beinorius,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	83,50
Daumantė Baranauskaitė,	Simono Daukanto gimnazija,	Šiaulių m.,	82,50
Laurynas Ramonas,	Lieporių gimnazija,	Šiaulių m.,	82,50
Mindaugas Ramanauskas,	Palangos senoji gimnazija,	Palangos m.,	82,00
Tomas Mackus,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	82,00
Andželika Medvedeva,	Elektrėnų „Versmės“ gimnazija,	Elektrėnų sav.,	81,25
Paulius Tamašauskas,	„Gabijos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	81,25
Darjuš Palevič,	Jašiūnų Mykolo Balinskio vidurinė mokykla,	Šalčininkų r.,	81,00
Edvin Turkot,	Jašiūnų Mykolo Balinskio vidurinė mokykla,	Šalčininkų r.,	81,00
Tomas Lukša,	Ukmergės Antano Smetonos gimnazija,	Ukmergės r.,	80,50
Evelina Fronska,	Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla,	Vilniaus r.,	80,00
Jurgis Balčiūnas,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	79,75
Rita Norbutaitė,	Laukuvos Norberto Vėliaus gimnazija,	Šilalės r.,	79,75

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Paulius Jonušas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	125,00
Rugile Bendinskaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	105,00
Tautvydas Punys,	„Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla,	Kauno m.,	105,00
Gintas Kuncevičius,	Mykolo Biržiškos gimnazija,	Vilniaus m.,	103,75
Linas Kondrackis,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	99,50
Laurynas Ambrasas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	99,00
Valdas Stonys,	Naujosios Akmenės Ramučių gimnazija,	Akmenės r.,	98,75
Arnas Gerčas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	98,00
Mykolas Karpavičius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	98,00
Miglius Budriūnas,	Kupiškio Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,	Kupiškio r.,	96,50
Mariuš Voitkun,	Rudaminos Ferdinando Ruščico gimnazija,	Vilniaus r.,	96,00
Vytautas Pečiukėnas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	95,00
Paulius Žilinskas,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	93,50
Paulina Kaziukonytė,	Mykolo Biržiškos gimnazija,	Vilniaus m.,	91,75
Benas Jacikas,	Tauragės Žalgirių gimnazija,	Tauragės r.,	90,75
Augustas Gornatkevičius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	89,25
Andrius Karužas,	Juodšilių „Šilo“ gimnazija,	Vilniaus r.,	88,75
Andrius Lukas Narbutas,	Domeikavos gimnazija,	Kauno r.,	88,75
Ričardas Karašinskas,	Vilkaviškio „Aušros“ gimnazija,	Vilkaviškio r.,	88,75
Arūnas Pakalniškis,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	88,25
Vytautas Kavaliauskas,	Mykolo Biržiškos gimnazija,	Vilniaus m.,	87,50
Karolis Bartkus,	„Aukuro“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	87,25
Dalius Jonaitis,	Mažeikių Merkelio Račkausko gimnazija,	Mažeikių r.,	87,00
Greta Musteikytė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	87,00
Irmantas Šermukšnis,	Molėtų gimnazija,	Molėtų r.,	86,25
Aistė Osinskytė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	85,75
Rapolas Daugintis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	85,75
Rokas Grybėnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	85,50
Antanas Žilakauskis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	84,75
Benas Taurosevieius,	Raseinių Prezidento Jono Žemaičio gimnazija,	Raseinių r.,	83,75
Paulius Voveraitis,	Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija,	Kretingos r.,	83,75
Antanas Radzevičius,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	83,50
Justas Valantinas,	Radviliškio Vaižganto gimnazija,	Radviliškio r.,	83,25
Rūta Žemaitytė,	Varėnos „Ąžuolo“ gimnazija,	Varėnos r.,	83,25
Vaidotas Gulbinas,	Mykolo Biržiškos gimnazija,	Vilniaus m.,	83,25
Mykolas Jasponis,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	83,00
Živilė Klibavičiūtė,	Žemaičių Kalvarijos vidurinė mokykla,	Plungės r.,	83,00
Mantas Plaščinskas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	82,50
Mantas Vaištaras,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	82,50
Mykolas Šermukšnis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	82,50
Tomas Baškys,	Stasio Šalkauskio gimnazija,	Šiaulių m.,	82,50
Michail Skalskis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	81,75
Julius Grigaitis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	81,50
Tomas Satkevičius,	Tuskulėnų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	81,25
Kamilė Druktenytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	81,00
Stanislovas Ambrasas,	„Saulėtekio“ gimnazija,	Šiaulių m.,	81,00
Edgaras Vaičiulis,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	80,75
Šarūnas Nejus,	Plutiškių vidurinė mokykla,	Kazlų Rūdos sav.,	80,75
Algimantas Gaubys,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	80,50
Giedrius Kripaitis,	Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos“ gimnazija,	Kauno m.,	80,25
Lukas Klebonas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	80,25

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

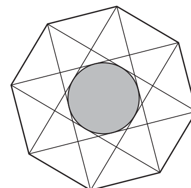
Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kuris skaičius didžiausias?
A) 2013 **B)** 2^{0+13} **C)** 20^{13} **D)** 201^3 **E)** $20 \cdot 13$

2. Taisyklingojo aštuonkampio kraštinės ilgis lygus 10. Jo įstrižainės iškerta mažesnį aštuonkampį, į kurį įbrėžtas apskritimas (žr. pav.). Kam lygus apskritimo spindulys?
A) 10 **B)** 7,5 **C)** 5 **D)** 2,5 **E)** 2



3. Prizmė turi iš viso 2013 sienų. Kiek ji turi briaunų?
A) 2011 **B)** 2013 **C)** 4022 **D)** 4024 **E)** 6033

4. Kokį skaičių gauname, ištraukę kubinę šaknį iš skaičiaus 3^{3^3}?
A) 3^3 **B)** 3^{3^3-1} **C)** 3^{2^3} **D)** 3^{3^2} **E)** $(\sqrt{3})^3$

5. Šių, 2013-ųjų, metų užraše yra keturi iš eilės einantys skaitmenys 0, 1, 2 ir 3. Kiek metų praėjo nuo paskutinio karto, kai metų užraše buvo kokie nors keturi iš eilės einantys skaitmenys?
A) 467 **B)** 527 **C)** 581 **D)** 693 **E)** 990

6. Tiesinė funkcija f tenkina lygybę $f(2013) - f(2001) = 100$. Kam lygus skirtumas $f(2031) - f(2013)$?
A) 75 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

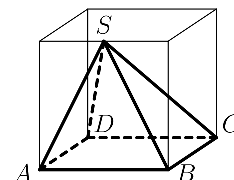
7. Kelios iš dvigubųjų nelygybių

$$4 < x^2 < 9, \quad 4 < 2x < 9, \quad 6 < 3x < 9, \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

teisingos su visomis x reikšmėmis, tenkinančiomis sąlygą $2 < x < 3$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8. Šeši bildukai pagavo 20 apuokų. Pirmasis bildukas pagavo vieną apuoką, antrasis – du, o trečiasis – tris. Ketvirtasis bildukas pagavo daugiau apuokų nei bet kuris kitas. Kiek mažiausiai apuokų galėjo pagauti ketvirtasis bildukas?
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

9. Neperregima piramidė $ABCDS$ yra perregimo kubo viduje (žr. pav.). Jos viršūnė S yra kubo briaunos vidurys. Kubas nufotografuotas iš viršaus, iš apačios, iš priekio, iš užpakalio, iš kairės ir iš dešinės. Kuris paveikslėlis nėra nė viena iš fotografijų?

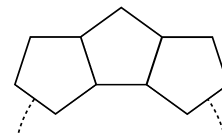


A) **B)** **C)** **D)** **E)**

10. Ištirpus bildukų auksui, jo tūris padidėja dvyliktadaliu. Kokia dalimi sumažėja tūris, kai auksas vėl sukietėja?
A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{14}$

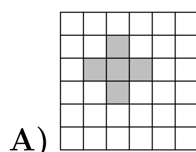
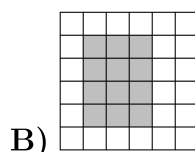
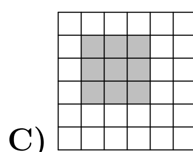
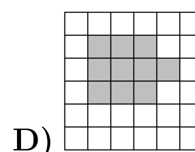
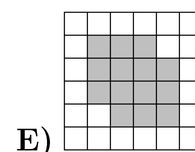
Klausimai po 4 taškus

11. Arnas vienodas taisyklingojo penkiakampio formos plyteles sudėjo ratu, šliedamas jas kraštinėmis vieną prie kitos (žr. pav.). Kiek plytelių sudaro pilną ratą?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15



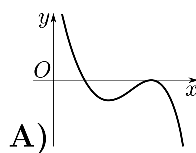
12. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių n, kad $\frac{n}{3}$ ir $3n$ abu yra triženkliai sveikieji skaičiai?
A) 12 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 100 **E)** 300

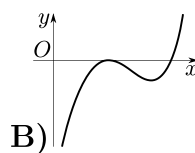
13. Skritulio formos kilimas patiestas ant kvadratinėmis plytelėmis dengtų grindų. Išdykėlė Inga nudažė visas plyteles, bent iš dalies uždengtas kilimo (t.y. turinčias su juo daugiau nei vieną bendrą tašką). Kurio nudažymo ji negalėjo gauti?

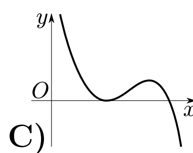
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

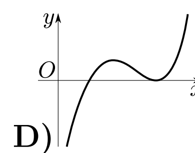
14. Funkcija $f(x)$ apibrėžta visiems sveikiesiems skaičiams ir įgyja sveikąsias reikšmes. Ramunė apie ją pasakė tokį teiginį: „Bet kokiam lyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra lyginis.“ Paaiškėjo, kad Ramunė neteisi. Tai reiškia, kad:
A) Bet kokiam lyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra nelyginis
B) Bet kokiam nelyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra lyginis
C) Bet kokiam nelyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra nelyginis
D) Yra toks lyginis skaičius x, kad skaičius $f(x)$ yra nelyginis
E) Yra toks nelyginis skaičius x, kad skaičius $f(x)$ yra nelyginis

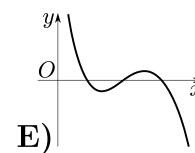
15. Duota funkcija $Q(x) = (a - x)(b - x)^2$, čia $a < b$. Viename iš šių brėžinių pavaizduotas jos grafikas. Kuriame?

A) 

B) 

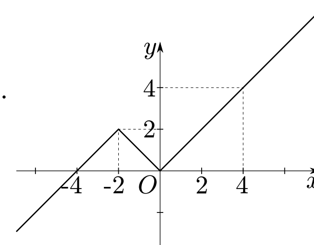
C) 

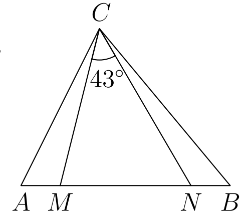
D) 

E) 

16. Viena stačiakampio kraštinė lygi 5. Stačiakampis padalytas į dvi figūras − kvadratą ir mažesnį stačiakampį. Vienos iš jų plotas lygus 4. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti pradinio stačiakampio antrosios kraštinės ilgis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17. Funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ grafiką sudaro atkarpa ir du spinduliai (žr. pav.). Kiek sprendinių turi lygtis $f(f(f(x))) = 0$?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0





18. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėti tokie taškai M ir N, kad $AN = AC$ ir $BM = BC$ (žr. pav.). Raskite $\angle ACB$, jei $\angle MCN = 43°$.
A) 86° **B)** 89° **C)** 90° **D)** 92° **E)** 94°

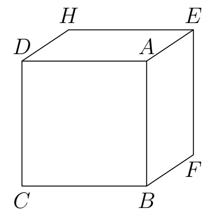
19. Kiek natūraliųjų skaičių porų (x, y) tenkina lygtį $x^2y^3 = 6^{12}$?
A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** Kitas skaičius

20. Dėžėje guli 900 kortelių. Ant kiekvienos iš jų užrašyta po skaičių nuo 100 iki 999 (bet kurių dviejų kortelių skaičiai skirtingi). Goda užsimerkusi traukia iš dėžės korteles. Kiek mažiausiai kortelių ji turi ištraukti, kad būtų visiškai tikra ištraukusi tris korteles su ta pačia skaitmenų suma?
A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

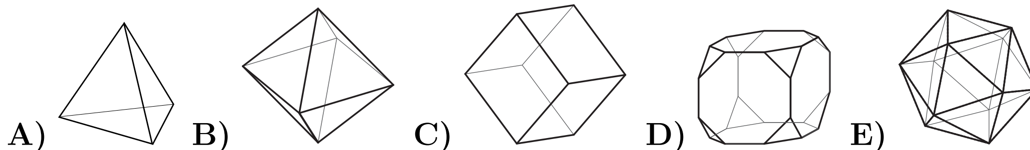
Klausimai po 5 taškus

21. Kiek yra sveikųjų skaičių tokių porų (x, y), kad $x \leqslant y$ ir $xy = 5(x + y)$?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

22. Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžia tokios jos savybės: ji yra periodinė su periodu 5, o intervale $[-2; 3)$ galioja lygybė $f(x) = x^2$. Raskite $f(2013)$.
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9



23. Pilnaviduris kubas (žr. pav.) perpjautas išilgai plokštumos, einančios per viršūnes D, E ir B, gretimas viršūnei A. Panašiai atlikti dar septyni pjūviai (per tris viršūnes, gretimas vienai iš kubo viršūnių). Tik tada kubas subyrėjo į dalis. Kaip atrodo kubo dalis, kuriai priklauso jo centras?



24. Kiek realiųjų sprendinių (x, y) turi lygtis $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?
A) 1 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** Be galo daug

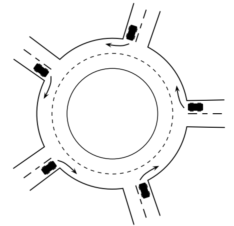
25. Neneigiamų sveikųjų skaičių aibę pažymėkime $\mathbb{N}_0$. Funkciją $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ apibrėžia sąlyga $f(2n) = f(2n + 1) = n$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0$. Bet kokiam natūraliajam skaičiui k pažymėkime $f^k(n) = f(f(...f(n)...)))$, čia dešinėje pusėje simbolis f pasikartoja k kartų. Kiek sprendinių turi lygtis $f^{2013}(n) = 1$?
A) 0 **B)** 4026 **C)** 2^{2012} **D)** 2^{2013} **E)** Be galo daug

26. Plokštumoje nubrėžtos kelios tiesės. Tiesė a kertasi su lygiai trimis tiesėmis, tiesė b – su lygiai keturiomis, o tiesė c – nei su lygiai trimis, nei su lygiai keturiomis tiesėmis. Kiek iš viso tiesių nubrėžta?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** Kitas skaičius

27. Sudėjus pirmuosius n natūraliųjų skaičių, gautas triženklis skaičius, kurio visi skaitmenys lygūs. Kam lygi skaičiaus n skaitmenų suma?
A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

28. Saloje gyvena tiesuoliai, visada sakantys tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Keliauninkas sutiko du salos gyventojus ir paklausė aukštesniojo, ar jie abu yra tiesuoliai. Gavęs atsakymą, jis dar negalėjo nustatyti, kas yra jo pašnekovai, todėl paklausė žemesniojo, ar aukštesnysis yra tiesuolis. Gavęs atsakymą, keliauninkas jau žinojo, kas yra jo sutikti salos gyventojai. Kuris iš teiginių apie juos yra teisingas?
A) Jie yra tiesuoliai **B)** Jie yra melagiai **C)** Tiesuolis yra tik aukštesnysis
D) Tiesuolis yra tik žemesnysis **E)** Nustatyti neįmanoma

29. Julija sugalvojo seką: pasirinko $a_1 = 1$, o kitus narius skaičiavo pagal formulę $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ (čia m ir n yra bet kokie natūralieji skaičiai). Kam lygus a_{100}?
A) 100 **B)** 1000 **C)** 2012 **D)** 4950 **E)** 5050



30. Į paveikslėlyje pavaizduotą žiedą skirtingais keliais tuo pačiu metu įvažiavo penkios mašinos. Jos visos ir paliko žiedą išvažiavusios skirtingomis kryptimis, nė viena neapvažiavusi pilno rato. Keliais būdais mašinos galėjo palikti žiedą?
A) 24 **B)** 44 **C)** 60 **D)** 81 **E)** 120

Sprendimai

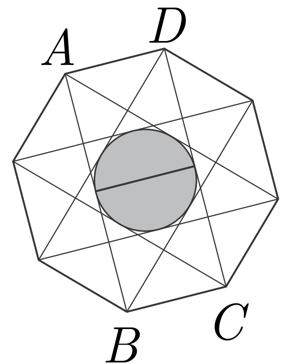
1. (C) 20^{13}

! Įvertinkime, kiek skaitmenų sudaro kiekvieną iš skaičių.

A) Turime keturis skaitmenis.
B) Kadangi $2^{13} = 2 \cdot (2^3)^4 < 2 \cdot 10^4 = 20000$, tai turime ne daugiau nei penkis skaitmenis. (Be to, šis atsakymas netinka, nes yra akivaizdžiai mažesnis už atsakymą C: $2^{13} < 20^{13}$.)
C) Kadangi $20^{13} > 10^{13}$, tai turime bent keturiolika skaitmenų.
D) Kadangi $201^3 < 300^3 = 27000000$, tai turime ne daugiau nei aštuonis skaitmenis.
E) Kadangi $20 \cdot 13 = 260$, teturime tris skaitmenis.

Matome, kad atsakymas C gerokai didesnis už kitus.

2. (C) 5



? Brėžinys tiesiog perša mintį, kad keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis. Skersmuo, jungiantis lietimosi taškus, statmenas abiem kraštinėms AB ir CD (žr. pav.), tad jo ilgis lygus atstumui tarp jų $BC = 10$. Apskritimo spindulys dvigubai trumpesnis: $10/2 = 5$.

! Taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti į apskritimą, kurį jo viršūnės dalija į lygias dalis. Todėl priešingos aštuonkampio viršūnės A ir C yra to apskritimo skersmens galai. Kampas ABC yra statusis (remiasi į pusapskritimį AC), kaip ir kampai BCD, DCA, CAB. Keturkampio $ABCD$ visi kampai statūs, todėl jis yra stačiakampis.

Tą patį galima įrodyti bet kuriam taisyklingajam daugiakampiui su lyginiu kraštinių skaičiumi: keturkampis, gautas dvi priešingas daugiakampio kraštines papildžius dviem kitomis atkarpomis, yra stačiakampis.

3. (E) 6033

! Dvi prizmės sienos yra jos pagrindai, todėl ji turi $2013 - 2 = 2011$ šoninių sienų-lygiagretainių. Kiek yra šoninių sienų, po tiek kraštinių turi pagrindai. Tad jau turime $2 \cdot 2011$ briaunų, priklausančių pagrindams. Pagrindams nepriklauso dar 2011 briaunų, jungiančių gretimas šonines prizmės sienas. Gauname $3 \cdot 2011 = 6033$ briaunų.

4. (D) 3^{3^2}

! Iš skaičiaus 3, pakelto laipsniu $3^3 = 27$, traukiame kubinę šaknį: $\sqrt[3]{3^{3^3}} = (3^{3^3})^{\frac{1}{3}} = 3^{(3^3 \cdot \frac{1}{3})} = 3^{3^2} = 3^9$. Tinka atsakymas D. Kituose atsakymuose skaičius 3 keliamas laipsniu $3, 3^3 - 1 = 26, 2^3 = 8, \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

5. (C) 581

! Šiame uždavinyje atsakymą galima gauti tiesiog iš eilės (nuo mažiausio) tikrinant atsakymus, kol gausime tinkamą metų užrašą. Bet iš karto spręskime šį uždavinį griežtai.

Jei ieškomas metų užrašas prasidėtų skaitmeniu 2, tai tas užrašas prasidėtų 200... arba 201... Dviejų nulių užraše būti negali; netinka nei vienas iš skaičių 2010, 2011, 2012. Ieškokime metų, prasidedančių vienetu. Jei vienetas yra vienas iš keturių iš eilės einančių skaitmenų, tai tie skaitmenys yra 0, 1, 2, 3 arba 1, 2, 3, 4. Vadinasi, didžiausias skaitmuo, einantis po vieneto, gali būti 4. Po jo didžiausias skaitmuo yra 3, o tada lieka skaitmuo 2. Taip gauname didžiausią tinkamą skaičių 1432. Nuo šių metų praėjo $2013 - 1432 = 581$ metai.

6. (D) 150

! Tiesinė funkcija turi pavidalą $f(x) = kx + b$. Tad

$$100 = f(2013) - f(2001) = 2013k + b - 2001k - b = (2013 - 2001)k = 12k$$

ir

$$f(2031) - f(2013) = (2031 - 2013)k = 18k = 18 \cdot \frac{100}{12} = 150.$$

7. (E) 4

! Nelygybes $2 < x < 3$ pakelkime kvadratu (tai turime teisę daryti su nelygybe, kai abi jos pusės teigiamos; ne tik skaičiai 2 ir 3, bet ir skaičius $x > 2$ yra teigiamas). Gauname išvadą: $4 < x^2 < 9$.

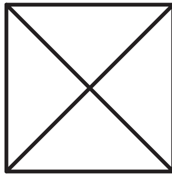
Nelygybes visada galima padauginti iš teigiamo skaičiaus. Padauginkime duotąsias nelygybes iš 2 ir iš 3: $4 < 2x < 6$ ir tuo labiau $4 < 2x < 9$; taip pat $6 < 3x < 9$.

Pagaliau nagrinėkime parabolę, kurią aprašo funkcija $y = x^2 - 2x$. Jos viršūnė yra $(1; -1)$ ir jos šakos nukreiptos į viršų. Todėl funkcija mažėja, kol $x < 1$, ir didėja, kai $x > 1$. Vadinasi, ji didėja, kai x kinta nuo 2 iki 3. T. y. y didėja nuo $2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ iki $3^2 - 2 \cdot 3 = 3$. Todėl galioja nelygybės $0 < x^2 - 2x < 3$. (Šias nelygybes pastabesnis žmogus gali įrodyti ir greičiau: tereikia iš nelygybių $2 < x < 3$ atimti 1, pakelti jas kvadratu ir vėl atimti 1.)

Įrodėme visas ketverias dvigubas nelygybes.

8. (B) 6

! Iš karto aišku, kad ketvirtasis bildukas pagavo bent keturis apuokus. Bet jei būtų pagavęs tik penkis ar (tuo labiau) tik keturis, tai 5-asis ir 6-asis bildukai pagautų po mažiau nei penkis apuokus, t. y. daugiausiai po keturis, ir bendra apuokų suma neviršytų $1+2+3+5+4+4 < 20$. Šešis apuokus 4-asis bildukas pagauti galėjo. Pvz., šešių bildukų grobis galėtų būti paskirstytas taip: $20 = 1 + 2 + 3 + 6 + 4 + 4$.

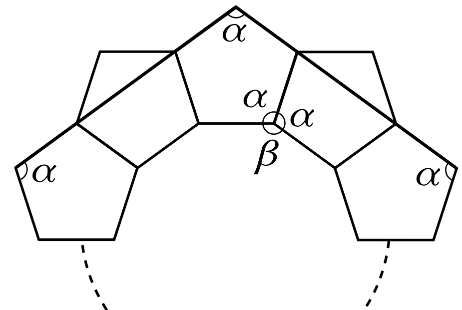
9. (E) 

! Paveikslėlis A sutampa su nuotraukomis iš priekio ir užpakalio, B – su nuotrauka iš dešinės ir su pasukta nuotrauka iš kairės, C – su nuotrauka iš apačios (nepamirškime, kad piramidė neperregima), D – su nuotrauka iš viršaus (matome ir sieną CDS, ir jos neužstojamą pagrindą $ABCD$). Visos galimybės paminėtos, tad paveikslėlis E neatitinka jokios nuotraukos.

10. (D) $\frac{1}{13}$

! Jei aukso luito tūris lygus V, tai auksui suskystėjus jo tūris bus $W = V + \frac{1}{12}V = \frac{13}{12}V$. Taigi $V = \frac{12}{13}W = W - \frac{1}{13}W$. Matome, kad auksui sukietėjus, jo tūris sumažės $\frac{1}{13}$.

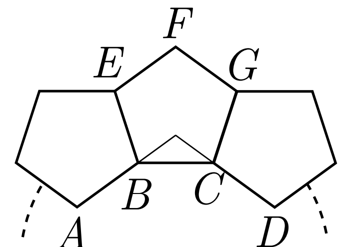
11. (C) 10



? Iš brėžinio nesunku atspėti, kad pratęsus kas antros plytelės „išorines" kraštines iki jų tarpusavio susikirtimo, gaunamas taisyklingasis daugiakampis, kurio kampas lygus taisyklingojo penkiakampio kampui α (žr. pav.). Vadinasi, tas daugiakampis ir bus penkiakampis. Plytelių, kurių kraštines pratęsėme, yra penkios, o tarp jų yra dar penkios plytelės, iš viso – 10 plytelių.

! „Vidinės", į figūros centrą nukreiptos plytelių kraštinės sudaro taisyklingąjį daugiakampį: jos lygios ir kampai tarp jų lygūs vis tam pačiam dydžiui $\beta = 360° - 2\alpha$ (žr. pav.). Raskime α. Daugiakampio kampų suma lygi $180°(n-2)$ ($n-$ viršūnių skaičius). Todėl taisyklingojo daugiakampio kampas lygus $\frac{180°(n-2)}{n}$. Taigi $\alpha = \frac{180°(5-2)}{5} = 108°$. Jei Arnas panaudojo m plytelių, tai turi galioti lygybės $\frac{180°(m-2)}{m} = \beta = 360° - 2\alpha = 144°$. Iš tiesinės lygties randame m: $180°(m-2) = 144°m$ arba $36°m = 360°$. Gavome $m = 10$.

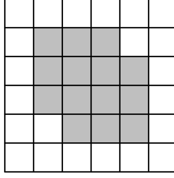
Nors uždavinys to nereikauja, galime paklausti, kodėl būtinai tos plytelės sudarys pilną ratą nepersidengdamos. Iš tiesų, kai jau žinome atsakymą, ir tai pagrįsti nesunku. Iš karto imkime dešimtkampį ir prie jo kraštinių iš išorės glauskime plyteles. Kad tokiu būdu plytelės priglus ne vien prie dešimtkampio, bet ir viena prie kitos, akivaizdu iš lygybės $\beta = 360° - 2\alpha$, garantuojančios, kad dviejų plytelių ir dešimtkampio kampai sudaro pilnąjį kampą.



!! Atsakymą galima pagrįsti ir neskaičiuojant kampų. Pratęskime atkarpas AB ir CD iki jų susikirtimo taško (žr. pav.). Tiesės AB ir EF lygiagrečios pagal priešinius kampus ABE ir BEF. Taip pat lygiagrečios tiesės CD ir FG. Vadinasi, AB ir CD kertasi tuo pačiu kampu, kaip ir EF su FG, t. y. taisyklingojo penkiakampio kampu α. Taip pratęsę kas antros plytelės „vidines" kraštines iki jų susikirtimų gausime taisyklingąjį daugiakampį su kampu α. Kadangi kuo daugiau taisyklingasis daugiakampis turi viršūnių, tuo jo kampas didesnis, tai kampą α gali turėti tik taisyklingasis penkiakampis. Ėmėme kas antrą plytelę, todėl jų iš viso yra $5 \cdot 2 = 10$.

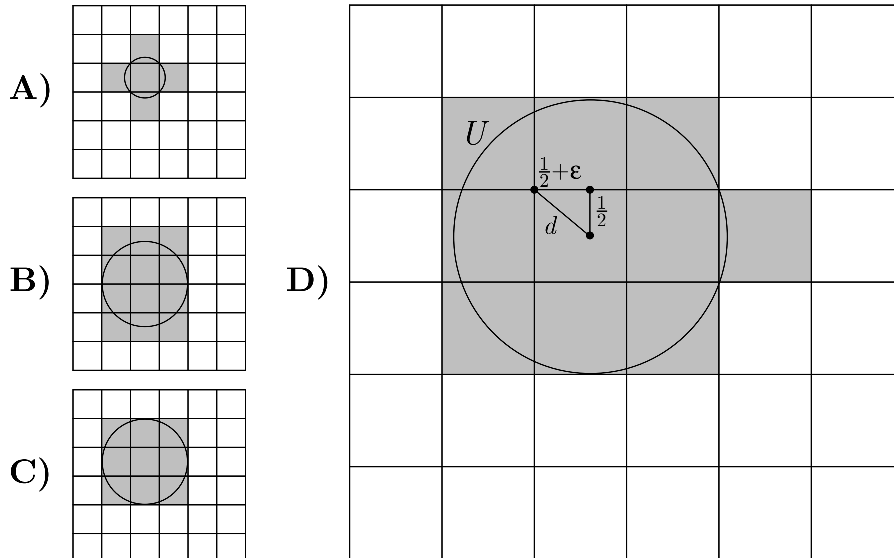
12. (A) 12

! Skaičius $\frac{n}{3}$ yra sveikasis, tad skaičius n dalijasi iš 3. O kad skaičiai $\frac{n}{3}$ ir $3n$ būtų triženkliai, turi galioti nelygybės $100 \leq \frac{n}{3} < 3n \leq 999$. Išspręskime nelygybes n atžvilgiu: $300 \leq n \leq 333$. Matome, kad n gali būti lygus 300, 303, ..., 333. Tą patį pasakykime kitaip: $\frac{n}{3}$ gali būti lygus 100, 101, ..., 111. Gavome $111 - 99 = 12$ galimybių.

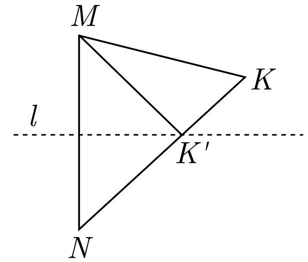
13. (E) 

? Paprasčiausia pastebėti, kad nudažymai A – D yra galimi (žr. pav.; plytelės kraštinės ilgį laikykime lygiu 1):

A) skritulio centras sutampa su plytelės centru, o spindulys lygus $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
B) centras sutampa su plytelės kraštinės viduriu ir $r = \frac{3}{2}$;
C) skritulio centras sutampa su plytelės centru, o spindulys lygus $r = \frac{3}{2}$;
D) panašu į atvejį C, tik skritulys yra lygiagrečiai pastumtas į dešinę nedideliu atstumu ϵ, kad apskritimas eitų per nenuspalvintų plytelių viršūnes.

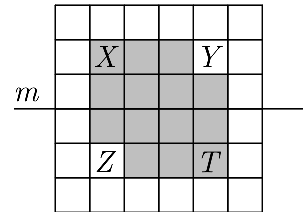


Abejojant tuo, ar skritulys dengs, ar nedengs tam tikras plyteles, visada galima rasti jų atstumą iki skritulio centro. Pvz., atveju B kampinės nudažyto stačiakampio plytelės dengiamos skritulio, nes jų atstumas (imamas kaip trumpiausias galimas atstumas) iki jo centro lygus $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} < \frac{3}{2} = r$. Atveju D panašiai galime rasti dydį ϵ. Lygties $\sqrt{(\frac{3}{2} - \epsilon)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2} (= r)$ abi puses pakeliame kvadratu ir išsprendžiame kvadratinę lygtį: $\epsilon = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$. Turime imti mažesnę reikšmę $\epsilon = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, nes didesnioji atitinka atvejį, kai patį skritulį pastumiame dar toliau ir jo centras atsiduria kitoje pusėje nuo nagrinėjamų plytelių viršūnių. Vėlgi, nepasitikint nuojauta, būtų galima patikrinti, ar skritulys vis dar kerta plytelę U: skritulio centro atstumas iki jos $d = \sqrt{(\frac{1}{2} + \epsilon)^2 + (\frac{1}{2})^2} < r = \frac{3}{2}$, tad plytelė nudažyta pagrįstai.
Renkamės atsakymą E.



! Prieštaros būdu įrodykime, kad nudažymo E niekada negausime. Tarkime, kad toks nudažymas galimas.

Pastebėkime, kad jei du taškai M ir N yra simetriški tiesės l atžvilgiu, o taškas K yra toje pačioje tiesės pusėje kaip ir M (žr. pav.), tai $KM < KN$. Iš tiesų, tiesė l kerta atkarpą KN. Sankirtos taškui K' gauname lygiašonį trikampį $K'MN$, kurio kampai $K'MN$ ir $K'NM$ lygūs. Bet tada kampas KMN didesnis už kampą KNM, todėl $KM < KN$. (Jei taškas K priklauso tiesei l, tai $KM = KN$.)

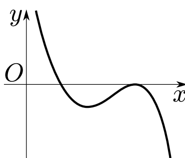


Remiantis įrodyta savybe (kurios teisingumas ir be įrodymo turėtų būti gana suprantamas), jei skritulio centras būtų žemiau tiesės m arba joje (žr. pav.), tai plytelė Z būtų nutolusi nuo to centro ne daugiau nei plytelė X. Plytelė X nudažyta, ji dengiama skritulio, todėl ir plytelė Z tada būtų nudažyta (juk centras yra jos pusėje ir jos taškai turi būti arčiau skritulio centro nei atitinkami simetriški plytelės X taškai). Ji nėra – vadinasi, skritulio centras turi būti virš tiesės m. Bet analogiškai nagrinėdami plyteles Y ir T gauname, kad centras turi būti žemiau tiesės m. Gavome prieštarą, todėl nudažymas nėra įmanomas.

14. (D) Yra toks lyginis skaičius x, kad skaičius $f(x)$ yra nelyginis

! Prašoma nurodyti teiginį, priešingą Ramunės teiginiui. Aišku, jis turi būti nesuderinamas su pradiniu teiginiu, neigti jį. Pvz., teiginys B su pradiniu teiginiu yra suderinamas: funkcija gali įgyti lygines reikšmes tiek lyginėms, tiek nelyginėms argumento reikšmėms. Pvz., čia tiktų funkcija $f(x) = 2x$. O teiginys A nėra suderinamas su pradiniu teiginiu, nes lyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ negali būti ir lyginis, ir nelyginis vienu metu. Tačiau teiginys A taip pat nėra priešingas, nesuderinamumo nepakanka. Priešingas teiginys turi tik paneigti pradinį – ir daugiau nieko. Teiginys A yra „stipresnis“: jis ne tik paneigia pradinį teiginį, bet ir eliminuoja dalį kitų galimybių (funkcijas, kurios lyginiams skaičiams x įgyja tiek lyginių, tiek nelyginių reiškmių; pvz., funkcija, lygi skaičiaus skaitmenų sumai).

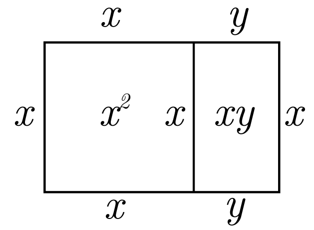
Teiginiai C ir E suderinami su pradiniu teiginiu kaip ir B (pvz., tinka funkcija $f(x) = x$). Mums lieka teiginys D, kuris ir yra priešingas. Iš tikrųjų, kad Ramunės teiginys būtų neteisingas, būtina ir pakanka, kad atsirastų toks lyginis skaičius x, kuriam skaičius $f(x)$ nebūtų lyginis. Būtent tai ir teigia teiginys D.

15. (A) 

! Prilyginkime funkciją nuliui ir tokiu būdu raskime jos sankirtas su Ox ašimi: $x = a$ ir $x = b$. Tad tų sankirtų tebus dvi (jau galime atmesti atsakymą E). Kairiąją iš jų atitinka maženioji reikšmė $x = a$. Kadangi $(b - x)^2 \geq 0$, tai funkcijos W reikšmių ženklas priklausys tik nuo funkcijos $a - x$ ženklo. Kai $x < a$, tai $a - x > 0$. Todėl funkcijos grafiko kairioji dalis bus virš Ox ašies, ir mums lieka atsakymai A bei C. Kai $x > a$, tai $a - x < 0$. Todėl likusioji funkcijos grafiko dalis bus žemiau Ox ašies, tik pakils prie ašies ties $x = b$. Toks yra atsakymas A.

16. (D) 4

! Suglaudę gautuosius stačiakampį ir kvadratą turime gauti pradinį stačiakampį. Tai galima padaryti, tik suglaudus juos kraštinėmis, kurios turi būti lygios (žr. pav.). Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x, o antrosios stačiakampio kraštinės ilgį – y. Pradinio stačiakampio krašinių ilgiai yra $x + y$ ir x, dviejų figūrų plotai lygūs x^2 ir xy. Duoti vienos iš dviejų pradinio stačiakampio kraštinių ilgis ir vienos iš dviejų figūrų plotas. Turime keturias galimybes:



1) $x + y = 5$ ir $x^2 = 4$. Gauname $x = 2$ ir $y = 5 - 2 = 3$. Stačiakampis 5×2 padalytas į kvadratą 2×2 ir stačiakampį 3×2.
2) $x+y = 5$ ir $xy = 4$. Gauname $y = 5-x$ ir $x(5-x) = 4$. Kvadratinė lygtis $x^2-5x+4 = 0$ turi šaknis 1 ir 4. Kai $x = 1$, tai $y = 4$. Kai $x = 4$, tai $y = 1$. Vienu atveju stačiakampis 5×1 padalytas į kvadratą 1×1 ir stačiakampį 4×1. Kitu atveju stačiakampis 5×4 padalytas į kvadratą 4×4 ir stačiakampį 1×4.
3) $x = 5$ ir $x^2 = 4$. Gauname $5 = x = 2$. Taip būti negali.
4) $x = 5$ ir $xy = 4$. Gauname $y = \frac{4}{x} = \frac{4}{5}$ ir $x + y = 5\frac{4}{5}$. Stačiakampis $5\frac{4}{5} \times 5$ padalytas į kvadratą 5×5 ir stačiakampį $\frac{4}{5} \times 5$.

Matome, kad pradinio stačiakampio antrosios kraštinės ilgis gali būti lygus vienai iš keturių reikšmių 2, 1, 4 arba $5\frac{4}{5}$.

17. (A) 4

! Spindulys, einantis per taškus $(-4; 0)$ ir $(-2; 2)$, priklauso tiesei $y = x + 4$ (tiesės, einančios per du duotus taškus, lygtį galima rasti užsirašant tiesės lygtį $y = kx + b$, įsistatant į ją taškų koordinates ir išsprendžiant dviejų lygčių sistemą). Spindulys, einantis per taškus $(0; 0)$ ir $(4; 4)$, priklauso tiesei $y = x$, o atkarpa – tiesei $y = -x$.

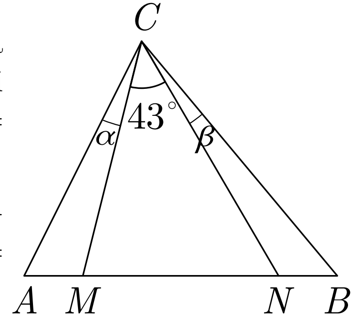
Funkcijos grafikas kerta Ox ašį, kai $x = -4$ ir kai $x = 0$. Todėl $f(t) = f(f(f(x))) = 0$, kai $t = f(f(x)) = 0$ arba $t = f(f(x)) = -4$. Uždavinį apie $f(f(f(x)))$ suvedėme į du analogiškus uždavinius apie $f(f(x))$. Toliau lygiai taip pat pereisime nuo $f(f(x))$ prie $f(x)$ ir pagaliau prie x.

Jei $f(s) = f(f(x)) = 0$, tai $s = f(x) = 0$ arba $f(x) = -4$. Atveju $f(s) = f(f(x)) = -4$ turime klausti, kada funkcija įgyja reikšmę -4. Iš funkcijos grafiko matome, kad ji neigiamas reikšmes įgyja, tik kai $x < -4$, o tada $f(x) = x + 4$ (kairysis spindulys). Išsprendę lygtį $f(s) = s + 4 = -4$, randame $s = f(x) = -8$. Taigi $f(x) = 0, -4$ arba -8.

Jei $f(x) = 0$, tai $x = 0$ arba $x = -4$. Jei $f(x) = -4$, tai (ir vėl) $x < -4, f(x) = x + 4$ ir $x = -8$. Jei $f(x) = -8$, tai $x < -4, f(x) = x + 4$ ir $x + 4 = -8$ duoda mums sprendinį $x = -12$.

Taigi turime keturis sprendinius $x = 0, -4, -8$ ir -12.

18. (E) 94°



! Pažymėkime $\alpha = \angle ACM$ ir $\beta = \angle BCN$ (žr. pav.). Mums reikia rasti $\angle ACB = \alpha + \beta + 43°$. Pasinaudokime tuo, kad trikampiai CAN ir CBM lygiašoniai: $AN = AC$ ir $BM = BC$, todėl $\angle CNA = \angle ACN = \alpha + 43°$ ir $\angle CMB = \angle BCM = \beta + 43°$.

Užrašykime trikampio CMN kampų sumą $180° = \angle CNM + \angle CMN + \angle MCN = \angle CNA + \angle CMB + 43° = \alpha + 43° + \beta + 43° + 43° = (\alpha + \beta + 43°) + 86°$. Randame $\angle ACB = \alpha + \beta + 43° = 180° - 86° = 94°$.

19. (E) Kitas skaičius

? Dešinioji lygybės pusė yra tikslusis kvadratas: $6^{12} = (6^6)^2$. Kairėje pusėje taip pat turime kvadratą x^2. Nuojauta turėtų patarti, kad tada natūraliojo skaičiaus kvadratas turėtų būti ir y^3. Dar daugiau, jei pats skaičius y nebūtų kvadratas, tai nebūtų ir y^3. Todėl pažymėkime $y = b^2$. Lygiai taip pat spėkime, kad skaičius x turėtų būti natūraliojo skaičiaus kubas: $x = a^3$. Tokiu būdu suprastiname lygtį: $a^6 b^6 = 6^{12} = (6^2)^6 = 36^6$ ir $ab = 36$. Šios lygties sprendinius rasti nesunku: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$. Turime penkis sprendinius, kur $a \leq b$. Keturis sprendinius, kur $a > b$, gauname sukeitę vietomis skaičius jau rastose porose. Iš viso gauname 9 sprendinius.

! Įsitikinkime, kad ? dalies samprotavimai teisingi. Perrašykime lygtį kitaip: $y = \frac{6^{12}}{x^2 y^2} = \left(\frac{6^6}{xy}\right)^2$. Tarkime, suprastinus trupmeną $\frac{6^6}{xy}$ gaunama nesuprastinama trupmena $\frac{m}{n}$. Tada trupmena $y = \frac{m^2}{n^2}$ taip pat nesuprastinama. Jei $n \neq 1$, tai skaičius y nėra sveikasis. Taigi $n = 1$ ir $y = m^2$ yra tikslusis kvadratas. Kad x yra kubas, lygiai taip pat įrodoma pasinaudojus lygybe $x = \frac{x^3 y^3}{6^{12}} = \left(\frac{xy}{6^4}\right)^3$.

!! Išskaidykime dešiniąją pusę pirminiais daugikliais: $6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12}$. Kairioji pusė taip pat negali dalytis iš kitų pirminių skaičių nei 2 ir 3. Todėl skaičius x ir y galime užrašyti kaip dvejeto ir trejeto laipsnių sandaugas: $x = 2^u 3^v$, $y = 2^w 3^t$ (čia u, v, w, t yra neneigiami sveikieji skaičiai). Gauname lygybę $(2^u 3^v)^2 (2^w 3^t)^3 = 6^{12}$ arba $2^{2u+3w} 3^{2v+3t} = 2^{12} \cdot 3^{12}$.
Turime išspręsti dviejų lygčių $2u + 3w = 12$ ir $2v + 3t = 12$ sistemą. Atskirai išspręskime pirmąją lygtį: u turi dalytis iš 3. Imdami iš eilės galimas u reikšmes (0, 3,...) gauname tris sveikuosius sprendinius $(u, w) = (0, 4), (3, 2), (6, 0)$ (kai $u > 6$, tai $w < 0$). Tokia pati antroji lygtis taip pat turi tris sprendinius. Abi kartu viena nuo kitos nepriklausomos lygtys turi $3 \cdot 3 = 9$ sprendinius. Vadinasi, tiek jų turi ir pradinė lygtis.

20. (C) 53

! Yra tik viena kortelė (pažymėta skačiumi 100) su mažiausia skaitmenų suma $1 = 1 + 0 + 0$ ir tik viena kortelė (pažymėta skačiumi 999) su didžiausia skaitmenų suma $27 = 9 + 9 + 9$. Skaitmenų sumas nuo 2 iki 26 atitinka bent po dvi korteles. Kad tuo įsitikintume, imkime sumas $2 = 1 + 0 + 1, 3 = 1 + 0 + 2, 4 = 1 + 0 + 3, ..., 10 = 1 + 0 + 9, 11 = 1 + 1 + 9, 12 = 1 + 2 + 9, ..., 19 = 1 + 9 + 9, 20 = 2 + 9 + 9, 21 = 3 + 9 + 9, ..., 26 = 8 + 9 + 9$. Kiekvienu atveju iš sudėtų skaitmenų galima sudaryti bent du triženklius skaičius (tai nepavyktų tik su trimis vienodais skaitmenimis arba su trimis skaitmenimis, iš kurių du yra nuliai). Taigi Goda gali ištraukti korteles su skaičiais 100 ir 999 bei po dvi korteles su kiekviena iš 25 sumų 2, 3, ..., 26. Matome, kad tarp $2 + 2 \cdot 25 = 52$ kortelių dar gali nebūti trijų norimų.

O 53 kortelių visada pakaks. Juk jei tarp ištrauktų kortelių nėra trijų su ta pačia skaitmenų suma, tai su kiekviena iš 25 sumų 2, 3, ..., 26 ištraukta daugiausiai po dvi korteles, o su likusiomis galimomis sumomis 1 ir 27 – daugiausiai po vieną kortelę. Tada galime turėti daugiausiai $\underbrace{2+2+...+2}_{25 \text{ kartus}}+1+1 = 2\cdot 25+2 = 52$ korteles.

21. (A) 4

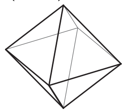
! Pertvarkykime lygtį:

$$xy - 5x - 5y = 0;$$
$$x(y-5) - 5y = 0;$$
$$x(y-5) - 5(y-5+5) = 0;$$
$$x(y-5) - 5(y-5) - 25 = 0;$$
$$(x-5)(y-5) = 25.$$

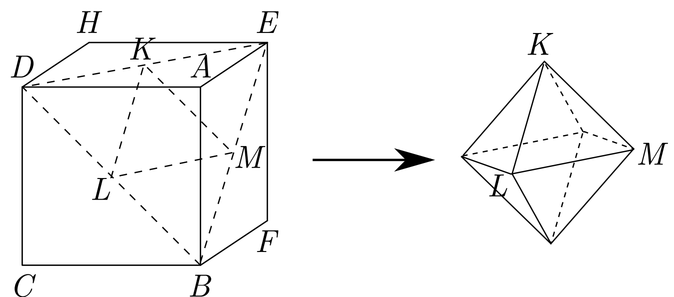
Kadangi $x-5$ dalija $25 = 5^2$, tai $x-5 = -25, -5, -1, 1, 5$ arba 25. Tada atitinkamai $y-5 = -1, -5, -25, 25, 5$ arba 1. Gauname lygties sprendinius $(-20, 4), (0, 0), (4, -20), (6, 30), (10, 10), (30, 6)$. Atsižvelgus į sąlygą $x \le y$, lieka 4 sprendiniai.

22. (D) 4

! Dėl funkcijos periodiškumo $f(2013) = f(2013-5) = f(2008) = f(2008-5) = f(2003) = ...$, ir vis atimdami po 5 pagaliau gausime, kad $f(2013) = f(2013-403\cdot 5) = f(-2)$. O -2 priklauso intervalui $[-2; 3)$ (kitaip nei skaičius 3, kuriam taip pat galioja lygybė $f(2013) = f(3)$), todėl $f(-2) = (-2)^2 = 4$.

23. (B) 

! Atkarpų ED, DB, BE vidurio taškus atitinkamai pažymėkime K, L, M (žr. pav.). Šie taškai yra ir kubo sienų centrai. Per trikampį KLM eina pjovimo plokštuma DEB.



Nagrinėti atkarpomis sujungtus kubo sienų centrus turėtų paskatinti tai, kad per kiekvieną iš jų eina po keturias pjovimo plokštumas. Tarkime, per tašką L eina plokštumos DEB, AHC, DGB, ACF. Be to, DEB ir AHC eina ir per tašką K. Eidamos per K ir L, plokštumos eina ir per šiuos taškus jungiančią trikampio KLM kraštinę, jos susikerta tiesėje KL.

Taigi jei sujungsime visų kubo sienų centrus, gausime oktaedrą, briaunainį, sudarytą iš tokių trikampių kaip KLM, kurių kraštinės jungia bendrą viršūnę turinčių kubo sienų centrus. Per šio oktaedro sienas eina aštuonios pjovimo plokštumos, tad jis ir yra visų tų plokštumų apribota kubo dalis.

24. (E) Be galo daug

? Nesunku rasti 9 sprendinius $(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$. Ieškokime dar bent vieno lygties sprendinio. Įsistatę bet kokią konkrečią x reikšmę iš intervalo $(0; 1)$ ir laikydami, kad $y > 0$, gausime kvadratinę lygtį y atžvilgiu $y^2 - y - (x - x^2) = 0$, kuri turės teigiamą šaknį. Pvz., kai $x = \frac{1}{2}$, gauname $y = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Radome 10 reikšmių, tad pirmieji keturi atsakymai jau netinka.

! Apsiribokime vien teigiamomis x ir y reikšmėmis ir pertvarkykime lygtį: $x^2 + y^2 = x + y$ arba $x^2 - x = -(y^2 - y)$. Nagrinėkime kvadratinę funkciją $f(x) = x^2 - x$ teigiamoms x reikšmėms. Jos grafikas bus parabolė, kurios viršūnė yra $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$, o šakos nukreiptos aukštyn. Tad funkcija f didėja, kai $x > \frac{1}{2}$, nuo $-\frac{1}{4}$ iki begalybės, įgydama visas tarpines reikšmes. Savo ruožtu, kai $y > \frac{1}{2}$, kvadratinė funkcija $-f(y) = -(y^2 - y)$ įgys visas reikšmes mažesnes už $\frac{1}{4}$. Jei paimsime bet kokią reikšmę t iš intervalo $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$, tai abi lygtys $t = x^2 - x$ ir $t = -(y^2 - y)$ turės po teigiamą sprendinį, su kuriais galios lygybė $x^2 - x = -(y^2 - y)$. Skaičių t galima iš intervalo parinkti be galo daug būdų ir kiekvienam t mes gausime vis po kitą sprendinį (x, y) (jei $x_1 = x_2$, tai $t_1 = x_1^2 - x_1 = x_2^2 - x_2 = t_2$). Todėl pradinė lygtis turės be galo daug sprendinių.

!! Apsiribokime vien teigiamomis x ir y reikšmėmis: $x^2 + y^2 = x + y$. Pertvarkykime lygtį išskirdami pilnuosius kvadratus:

$$4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 0,$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 2,$$

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2.$$

Pasižymėję $X = 2x-1$ ir $Y = 2y-1$, gauname apskritimo lygtį $X^2+Y^2 = 2$. Apskritimą sudaro be galo daug taškų, tarp jų – be galo daug taškų, esančių pirmajame koordinačių sistemos ketvirtyje (ketvirtis apskritimo). Todėl paskutinė lygtis turi be galo daug tokių sprendinių (X, Y), kad $X, Y > 0$, o lygtis $x^2 + y^2 = x + y$ turi be galo daug tokių sprendinių, kad $2x - 1, 2y - 1 > 0$, t. y. be galo daug tokių sprendinių, kad $x, y > \frac{1}{2}$. Tuo labiau $x, y > 0$, tad visi šie be galo daug sprendinių bus ir pradinės lygties sprendiniai.

25. (D) 2^{2013}

! Pažiūrėkime, kaip kinta funkcija f: $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 2, f(6) = 3, f(7) = 3, f(8) = 4, ...$ Kai m yra lyginis skaičius, tai $f(m) = \frac{m}{2}$ ir gretima reikšmė $f(m+1) = f(2 \cdot \frac{m}{2} + 1) = \frac{m}{2}$. Matome, kad funkcija nemažėjanti. Bet tada ir funkcija $f^2(m) = f(f(m))$ nemažėjanti: jei $a > b$, tai $f(a) \geq f(b)$ ir $f(f(a)) \geq f(f(b))$. Lygiai taip pat nemažėjančios yra funkcijos $f^3, f^4, ..., f^{2013}$.

Pastebėkime, kad $f(2^k) = f(2^{k-1} \cdot 2) = 2^{k-1}$ ir $f(2^k - 1) = f(2(2^{k-1} - 1) + 1) = 2^{k-1} - 1$, kai k yra natūralusis skaičius. Todėl $f^{2013}(2^{2013} - 1) = f^{2012}(f(2^{2013} - 1)) = f^{2012}(2^{2012} - 1)$. Tuo pačiu būdu toliau gauname, kad $f^{2013}(2^{2013} - 1) = f^{2012}(2^{2012} - 1) = f^{2011}(2^{2011} - 1) = ... = f^2(2^2 - 1) = f(2 - 1) = f(1) = 0$. Padidinę argumentą vienetu, gausime kitokį rezultatą $f^{2013}(2^{2013}) = f^{2012}(2^{2012}) = f^{2011}(2^{2011}) = ... = f^2(2^2) = f(2) = 1$. Panašiai $f^{2013}(2^{2014} - 1) = f^{2012}(2^{2013} - 1) = f^{2011}(2^{2012} - 1) = ... = f^2(2^3 - 1) = f(2^2 - 1) = f(3) = 1$ bei $f^{2013}(2^{2014}) = f^{2012}(2^{2013}) = f^{2011}(2^{2012}) = ... = f^2(2^3) = f(2^2) = f(4) = 2$.

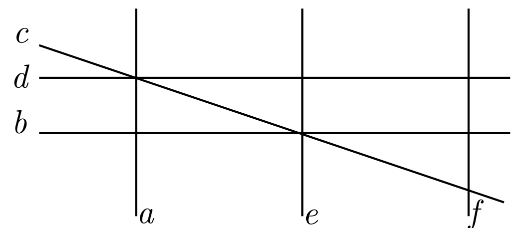
Kadangi funkcija f^{2013} nemažėjanti, tai nustatėme, kad $f^{2013}(n) = 0$, kai $n \leq 2^{2013} - 1$, $f^{2013}(n) = 1$, kai $2^{2013} \leq n \leq 2^{2014} - 1$, ir $f^{2013}(n) \geq 2$, kai $n \geq 2^{2014}$. Tarp 2^{2013} ir $2^{2014} - 1$ yra $2^{2014} - 1 - (2^{2013} - 1) = 2^{2014} - 2^{2013} = 2^{2013}$ skaičių.

!! Jei skaičių n užrašysime dvetainėje skaičiavimo sistemoje, vien per skaitmenis 0 ir 1, tai iš skaičiaus $n > 1$ skaičių $f(n)$ visada gausime nubraukdami paskutinįjį skaičiaus n skaitmenį: lyginį skačių, kuris baigiaisi 0, padalijame iš 2, nubraukdami tą skaitmenį 0; o iš nelyginio, besibaigiančio 1, atimame 1, paskutinįjį skaitmenį paversdami 0, ir gautąjį lyginį skaičių, besibaigiantį 0, vėlgi padalijame iš 2.

Skaičių $f^{2013}(n)$ gausime, iš eilės nubraukdami paskutiniuosius 2013 skaičiaus n dvejetainės išraiškos skaitmenų. Tad $f^{2013}(n) = 1$ skaičiams, kurių dvejetainėje išraiškoje po pirmojo skaitmens 1 eina dar 2013 bet kokių skaitmenų. Kiekvieną iš tų skaitmenų galime laisvai parinkti dviem būdais (0 arba 1), todėl iš viso turime $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{2013}$ galimybių.

26. (C) 6

? Jei tiesės kerta ne po lygų skaičių kitų tiesių, tai kai kurios iš jų turi būti lygiagrečios. Pabandžius įvairius variantus, galima rasti pavyzdį su 6 tiesėmis (žr. pav.).



! Įrodykime, kad kito tiesių skaičiaus gauti neįmanoma. Tiesių skaičių pažymėkime n. Kadangi tiesė b kertasi su keturiomis tiesėmis, tai $n \geq 5$. Jei dvi tiesės yra lygiagečios, tai tiesės, kertančios vieną iš jų, kerta ir kitą. Todėl dvi lygiagrečios tiesės kertasi su vienodu kitų tiesių skaičiumi. Todėl pagal uždavinio sąlygą jokios dvi iš tiesių a, b ir c nėra lygiagrečios. Tiesė a kertasi su tiesėmis b, c ir dar su lygiai viena tiese, kurią pažymėkime d. Visos kitos tiesės, kurių yra $n - 4$, turi būti lygiagrečios su tiese a. Kadangi jos lygiagrečios su a, tai turi kirsti tiek b, tiek c, kaip tai daro a.

Jei $n = 5$, tai tiesė c kertasi su daugiausiai keturiomis tiesėmis, bet nei su keturiomis, nei su trimis, todėl tik su dviem $-$ a ir b. Tai reiškia, kad kitos tiesės, tarp jų ir tiesė, lygiagreti su tiese a, yra lygiagrečios su c, o taip būti negali, nes a ir c nelygiagrečios.

Jei $n \geq 7$, tai tiesei a lygiagrečios bent $7 - 4 = 3$ tiesės. Jos visos drauge su a ir c kerta tiesę b, o tai prieštarauja tam, kad b kertasi tik su keturiomis tiesėmis.

Vadinasi, $n = 6$.

27. (B) 9

? Turime lygybę $1+2+3+...+n = \overline{aaa} = a \cdot 111$, čia a yra nenulinis skaitmuo. Pagal aritmentinės progresiijos formulę $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Be to, $111 = 37 \cdot 3$, todėl 37 dalija $\frac{n(n+1)}{2}$ ir (tuo labiau) $n(n + 1)$. Kadangi 37 yra pirminis skaičius, tai jis dalija vieną iš dauginamųjų n ir $n + 1$. Tad turime tikrinti galimybes $n = 37, 2 \cdot 37, 3 \cdot 37, ...$ bei $n + 1 = 37, 2 \cdot 37, 3 \cdot 37, ...$ Dabar jau nesunku pastebėti, kad kai $n + 1 = 37$, tai $1 + 2 + 3 + ... + 36 = \frac{36 \cdot 37}{2} = 18 \cdot 37 = 6 \cdot 3 \cdot 37 = 6 \cdot 111 = 666$. Šiuo atveju skaičiaus $n = 36$ skaitmenų suma lygi $3 + 6 = 9$.

! Įrodykime, kad kitos n ir $n+1$ reikšmės, gautos ? dalyje, netinka. Reikšmė $n = 37$ netinka, nes $\frac{n(n+1)}{2} = 37 \cdot 19$ nesidalija iš 3 ir tuo labiau iš 111. Likusios reikšmės tiesiog per didelės: jau kai n ar $n+1 = 2 \cdot 37$, tai skaičius $\frac{n(n+1)}{2} \geq 37 \cdot (2 \cdot 37 - 1) > 37 \cdot 27 = 999$ nėra triženklis.

28. (D) Tiesuolis yra tik žemesnysis

! Nagrinėkime pirmąjį klausimą ir visas galimas situacijas.

1) Abu salos gyventojai tiesuoliai. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „taip". Gautasis atsakymas yra „taip".
2) Tik aukštesnysis gyventojas yra tiesuolis. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „ne".
3) Tik žemesnysis gyventojas yra tiesuolis. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „taip".
4) Abu salos gyventojai melagiai. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „taip".

Keliauninkas po atsakymo „ne" galėtų nustatyti, kad tik aukštesnysis gyventojas yra tiesuolis. Kadangi to nenustatė, tai gavo atsakymą „taip" ir atmetė 2) atvejį. Nagrinėkime antrąjį klausimą ir visas galimas situacijas.

1) Abu salos gyventojai tiesuoliai. Teisingas atsakymas į antrąjį klausimą yra „taip". Gautasis atsakymas yra „taip".
2) Tik aukštesnysis gyventojas yra tiesuolis. Šis atvejis jau atmestas po pirmojo klausimo.
3) Tik žemesnysis gyventojas yra tiesuolis. Teisingas atsakymas į antrąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „ne".
4) Abu salos gyventojai melagiai. Teisingas atsakymas į antrąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „taip".

Keliauninkas po atsakymo „taip" negalėtų pasirinkti tarp 1) ir 4) atvejų. Kadangi pašnekovų tapatybę jis nustatė, tai gavo atsakymą „ne", kuriuo remdamasis pasirinko likusį 3) atvejį, atitinkantį tikrovę.

29. (E) 5050

! Visos informacijos, kurią suteikia duotoji formulė, sprendime nereikia. Formulėje imkime $m = 1$:

$$a_{n+1} = a_1 + a_n + n = a_n + (n+1).$$

Vadinasi, $a_{100} = a_{99} + 100 = a_{98} + 99 + 100 = ... = a_2 + 3 + 4 + ... + 100 = a_1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050$ (pasinaudojome aritmentinės progresijos sumos formule).

(Kaip radome a_{100}, taip galime rasti bet kurį narį $a_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Pastebėkime, kad taip apibrėžta seka tenkina ir bendrąją Julijos formulę, kuria nesinaudojome. Bendroji formulė virsta lygybe $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + mn$, kuri iš tiesų yra teisinga bet kuriems natūraliesiems skaičiams m ir n: tuo galima įsitikinti ją suprastinus.)

30. (B) 44

! Nagrinėkime du atvejus, kaip mašinos galėjo palikti žiedą.

1) Tarkime, kad yra dvi mašinos nuvažiavusios viena kitos keliais, „apsikeitusios" jais. Tas mašinas pažymėkime A ir B, o likusias tris $-$ C, D, E. Jei dvi iš tų trijų taip pat nuvažiuotų viena kitos keliais, tai likusioji penktoji mašina turėtų važiuoti savo pačios keliu, kuriuo ji įvažiavo. Taip būti negali. Iš penkių mašinų išskirti dvi mašinas A ir B galime $C_5^2 = 10$ būdų (derinių skaičius).

Kaip gali važiuoti kitos trys mašinos? Yra du būdai. Jei mašina C važiuotų mašinos D keliu, tai mašinai D liktų kelias, kuriuo į žiedą įvažiavo mašina E, o pastarajai liktų mašinos C kelias. O jei mašina C važiuotų mašinos E keliu, tai mašina E važiuotų mašinos D keliu ir mašina D važiuotų mašinos C keliu.

Gauname $10 \cdot 2 = 20$ galimybių.

2) Tarkime, kad nėra dviejų mašinų, nuvažiavusių viena kitos keliais. Kaip dabar mašinos gali išvažiuoti iš žiedo? Pradėkime nuo bet kurios mašinos, kurią užfiksuokime ir pažymėkime A. Ji išvažiuoja kitos mašinos, kurią pažymėkime B, keliu. Mašiną B galime pasirinkti 4 būdais. Ji negali važiuoti mašinos A keliu, nes kitaip turėtume 1) atvejį. Tad ji išvažiuoja vienos iš trijų likusių mašinų keliu. Tą naują mašiną pažymėkime C; ją galime pasirinkti 3 būdais. Jei C išvažiuotų mašinos A keliu, tai likusios neįvardytos dvi mašinos turėtų išvažiuoti viena kitos keliais, o taip vėlgi negali būti. Mašinos B kelias jau užimtas mašinos A. Todėl C turi išvažiuoti vienos iš dviejų likusių mašinų keliu. Tą naują mašiną pažymėkime D; ją galime pasirinkti 2 būdais. Mašina D taip pat negali išvykti mašinos A keliu, nes tada likusi penktoji mašina (ją pažymėkime E) turėtų važiuoti savo pačios keliu. Tad mašinai D lieka mašinos E kelias, o mašinai E lieka paskutinis dar neužimtas kelias, kuriuo į žiedą įvažiavo mašina A. Mašinos apsikeičia keliais cikliškai: A išvažiuoja B keliu, $B - C$ keliu, $C - D$ keliu, $D - E$ keliu ir $E - A$ keliu.

Gauname $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ galimybes.

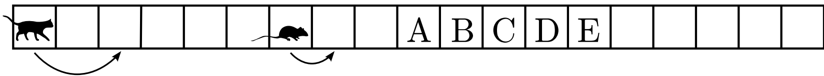
Iš viso mašinos gali palikti žiedą $20 + 24 = 44$ būdais.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	C
2	C
3	E
4	D
5	C
6	D
7	E
8	B
9	E
10	D
11	C
12	A
13	E
14	D
15	A
16	D
17	A
18	E
19	E
20	C
21	A
22	D
23	B
24	E
25	D
26	C
27	B
28	D
29	E
30	B

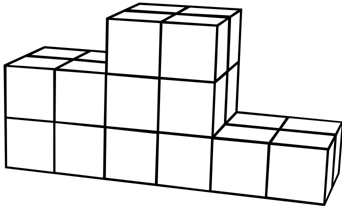
Questions for 5 points

13. Cat and Mouse are moving to the right. When Mouse jumps 1 tile, Cat jumps 2 tiles at the same time. On which tile does Cat catch Mouse?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

14. Peter built a podium (as in the picture). How many cubes did he use?



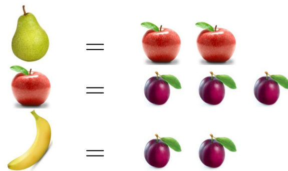
A) 12 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 22 **E)** 24

15. There are 5 children in a family. Kitty is 2 years older than Betty, but 2 years younger than Dannie. Teddy is 3 years older than Annie. Betty and Annie are twins. Who of them is the eldest?
A) Annie **B)** Betty **C)** Dannie **D)** Kitty **E)** Teddy

16. A square box is filled with two layers of identical square pieces of chocolate. Kirill has eaten all 20 pieces in the upper layer along the walls of the box. How many pieces of chocolate are left in the box?
A) 16 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 52 **E)** 70

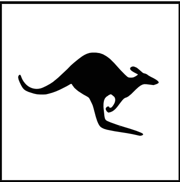
17. Kasia has 3 brothers and 3 sisters. How many brothers and how many sisters does her brother Mike have?
A) 3 brothers and 3 sisters **B)** 3 brothers and 4 sisters **C)** 2 brothers and 3 sisters
D) 3 brothers and 2 sisters **E)** 2 brothers and 4 sisters

18. In a game it is possible to make the following exchanges:

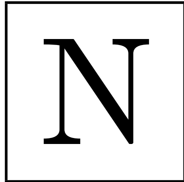


Adam has 6 pears. How many bananas will Adam have, when he trades all his pears for just bananas?
A) 12 **B)** 36 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 6

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija *VU Matematikos ir informatikos fakultetas*
Kengūros organizavimo komitetas *Leidykla TEV* *VU Matematikos ir informatikos institutas*



KANGAROO 2013

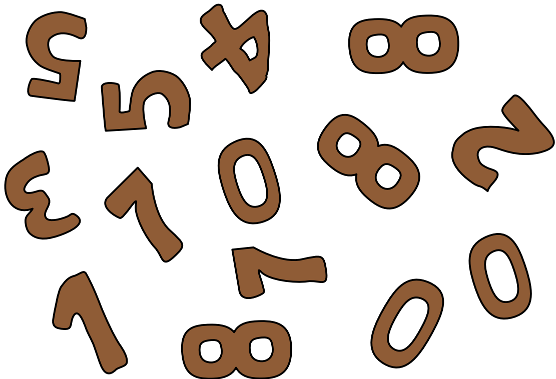


Time allowed: 50 min
Calculators are not permitted

Nipper
1–2 grades

Questions for 3 points

1. Which digits are missing?



A) 3 and 5 **B)** 4 and 8 **C)** 2 and 0 **D)** 6 and 9 **E)** 7 and 1

2. There are 12 books on a shelf and four children in a room.

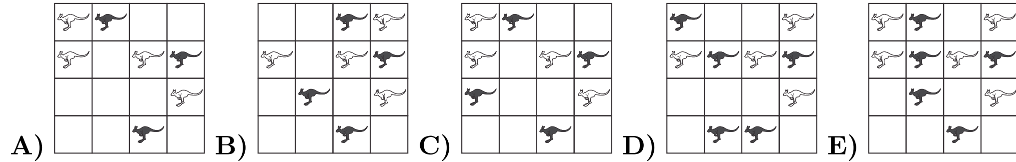


How many books will be left on the shelf if each child takes one book?
A) 12 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 0

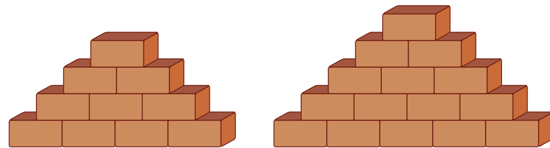
3. Which of the dresses has less than 7 dots, but more than 5 dots?



4. In which figure is the number of black kangaroos bigger than the number of white kangaroes?



5. How many more bricks are there in the larger stack?

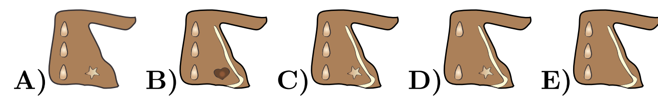


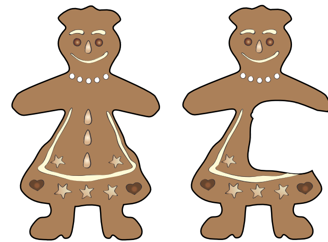
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

6. Ana has one coin of 5 cents, one coin of 10 cents, one coin of 20 cents and one coin of 50 cents. How many different values can she make with these coins?
A) 4 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

Questions for 4 points

7. Lotta cuts a big piece out of a cake. Which one?





8. Ann has . Barb gave Eve . Jim has . Bob has .
Who is Barb?

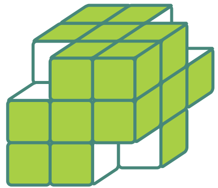


9. Father gives 5 apples to each of his three children. Ana gives 3 apples to Sanja and then Sanja gives half of all her apples to Mihael. How many apples does Mihael have now?
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9



10. George has 2 cats of the same weight. What is the weight of one cat if George weighs 30 kilograms?
A) 1 kilogram **B)** 2 kilograms **C)** 3 kilograms
D) 4 kilograms **E)** 5 kilograms

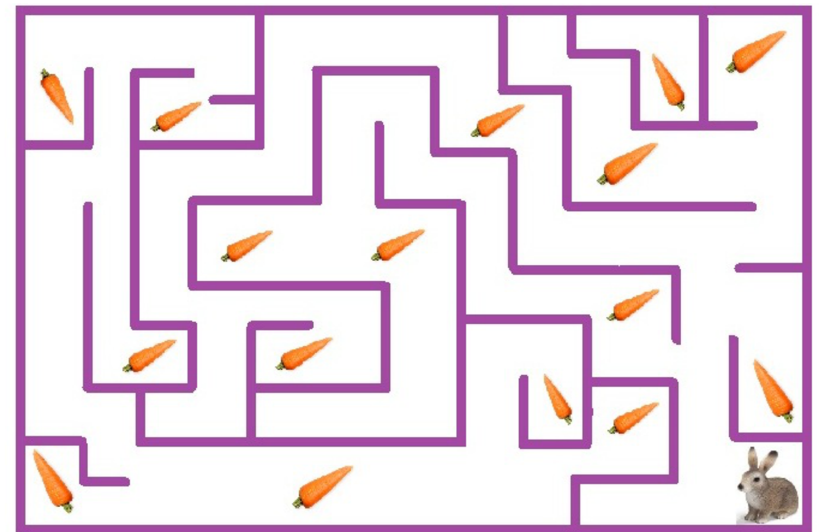
11. Ania makes a large cube from 27 small white cubes. She paints all the faces of the large cube green. Then Ania removes a small cube from four corners, as shown. Whilst the paint is still wet, she stamps each of the new faces onto a piece of paper. How many of the following stamps can Ania make?





A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

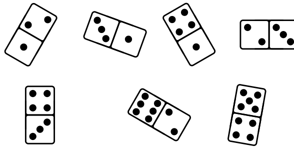
12. How many carrots can the rabbit eat, walking freely in this maze?



A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 16

19. In December Tosha-the-cat slept for exactly 3 weeks. How many minutes did he stay awake during this month?
A) $(31-7)\cdot 3\cdot 24\cdot 60$ **B)** $(31-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60$ **C)** $(30-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60$
D) $(31-7)\cdot 24\cdot 60$ **E)** $(31-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60\cdot 60$

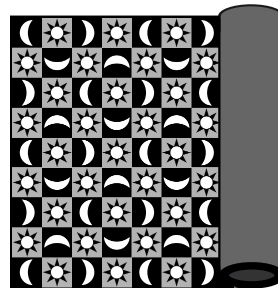
20. Basil has several domino tiles, as shown in the figure. He wants to arrange them in a line according to the following domino rule: in any two neighboring tiles, the neighboring squares must have the same number of points. What is the largest number of tiles he can arrange in this way?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

21. Cristi has to sell 7 glass bells that vary in price: 1 euro, 2 euro, 3 euro, 4 euro, 5 euro, 6 euro, 7 euro. In how many ways can Cristi divide all the glass bells in three packages so that all the packages have the same price?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Such a division is not possible

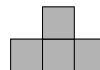
22. Peter bought a carpet 36 dm wide and 60 dm long. The carpet has a pattern of small squares containing either a sun or a moon, as can be seen in the figure. You can see that along the width there are 9 squares. When the carpet is fully unrolled, how many moons can be seen?



A) 68 **B)** 67 **C)** 65 **D)** 63 **E)** 60

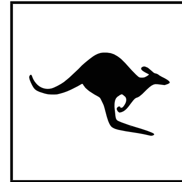
23. Baby Roo wrote down several numbers using only the digits 0 and 1. The sum of these numbers is 2013. It turned out that it is impossible to get the same sum with a smaller number of summands of this kind. How many numbers were written by Baby Roo?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 204

24. Beatrice has a lot of pieces like the grey one in the picture. At least how many of these grey pieces do you need to make a grey square?

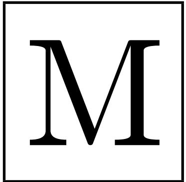


A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija *VU Matematikos ir informatikos fakultetas*
Kengūros organizavimo komitetas *Leidykla TEV* *VU Matematikos ir informatikos institutas*



KANGAROO 2013

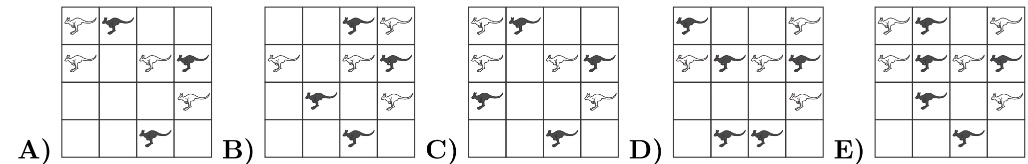


Time allowed: 75 min
Calculators are not permitted

Minor
3–4 grades

Questions for 3 points

1. In which figure is the number of black kangaroos bigger than the number of white kangaroes?



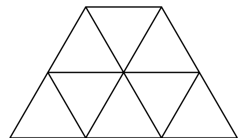
2. Aline writes a correct calculation. Then she covers two digits which are the same with stickers:

4▯ + 5▯ = 104

Which digit is under the stickers?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

3. Father gives 5 apples to each of his three children. Ana gives 3 apples to Sanja and then Sanja gives half of all her apples to Mihael. How many apples does Mihael have now?
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

4. How many triangles can be seen in the picture?



A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

5. Kasia has 3 brothers and 3 sisters. How many brothers and how many sisters does her brother Mike have?
A) 3 brothers and 3 sisters **B)** 3 brothers and 4 sisters **C)** 2 brothers and 3 sisters
D) 3 brothers and 2 sisters **E)** 2 brothers and 4 sisters

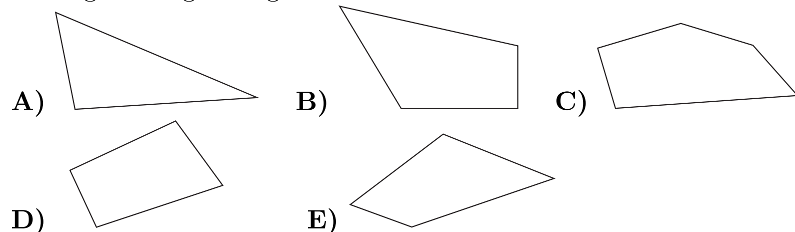
6. Daniel had a package of 36 candies. He divided all the candies equally among all his friends. Which of the following was definitely not the number of friends?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

7. Vero's mum prepares sandwiches with two slices of bread each. A package of bread has 24 slices. How many sandwiches can she prepare from two and a half packages of bread?
A) 24 **B)** 30 **C)** 48 **D)** 34 **E)** 26

8. About the number 325, five boys said:
Andrei: "This is a 3-digit number".
Boris: "All digits are distinct".
Vitya: "The sum of the digits is 10".
Grisha: "The units digit is 5".
Danya: "All digits are odd".
Which of the boys was wrong?
A) Andrei **B)** Boris **C)** Vitya **D)** Grisha **E)** Danya

Questions for 4 points

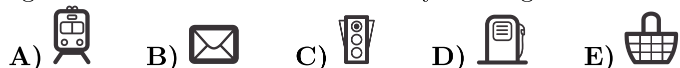
9. The rectangular mirror was broken. Which of the following pieces is missing in the given figure of the broken mirror?

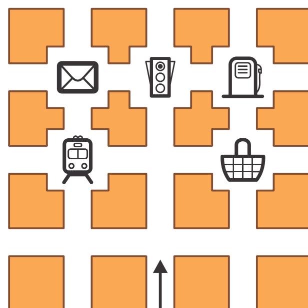


10. When Pinocchio lies, his nose gets 6 cm longer. When he tells the truth, his nose gets 2 cm shorter. When his nose was 9 cm long, he told three lies and made two true statements. How long was Pinocchio's nose afterwards?
A) 14 cm **B)** 15 cm **C)** 19 cm **D)** 23 cm **E)** 31 cm

11. In a shop you can buy oranges in boxes of three different sizes: with 5 oranges, with 9 oranges or with 10 oranges. Pedro wants to buy exactly 48 oranges. What is the smallest number of boxes he can buy?
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

12. Ann starts walking in the direction of the arrow. At every intersection of streets she turns either to the right or to the left. First she goes to the right, then to the left then again to the left, then to the right then to the left, and finally again to the left. Then Ann is finally walking towards:



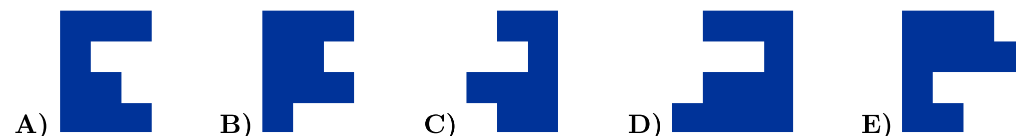


13. Schoolmates Andy, Betty, Cathie and Dannie were born in the same year. Their birthdays were on February 20th, April 12th, May 12th and May 25th, not necessarily in this order. Betty and Andy were born in the same month. Andy and Cathie were born in the same day of different months. Who of these schoolmates is the oldest?
A) Andy **B)** Betty **C)** Cathie **D)** Dannie **E)** Impossible to determine

14. 30 children from Adventure Park took part in events. 15 of them took part in the moving bridge contest, and 20 of them went down the zip-wire. How many children from Adventure Park took part in both events?
A) 25 **B)** 15 **C)** 30 **D)** 10 **E)** 5

15. Which of the listed pieces fits with the piece in the picture on the right such that together they form a rectangle?



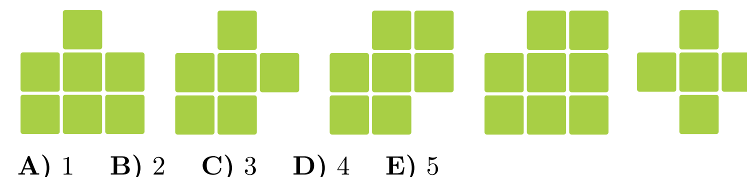


16. The number 35 has the property that it is divisible by the digit in the unit position, because 35 divided by 5 is 7. The number 38 does not have this property. How many numbers greater than 21 and smaller than 30 have this property?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Questions for 5 points

17. Ania makes a large cube from 27 small white cubes. She paints all the faces of the large cube green. Then Ania removes a small cube from four corners, as shown. Whilst the paint is still wet, she stamps each of the new faces onto a piece of paper. How many of the following stamps can Ania make?

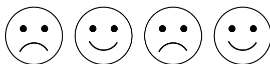




A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

18. After the First of January 2013, how many years will pass before the following event happens for the first time: the product of digits in the notation of the year is greater than the sum of these digits?
A) 87 **B)** 98 **C)** 101 **D)** 102 **E)** 103

24. There are four buttons in a row as shown in the picture. Two of them show happy faces, and two of them show sad faces. If we press on a face, its expression turns to the opposite (e.g. a funny face turns into a sad face after the touch). In addition to this, the adjacent buttons also change their expressions. What is the least number of times you need to press the buttons in order to get all happy faces?

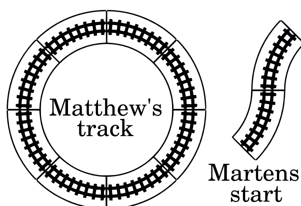


A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

25. 40 boys and 28 girls stand in a circle, hand in hand, all facing inwards. Exactly 18 boys give their right hand to a girl. How many boys give their left hand to a girl?
A) 18 **B)** 9 **C)** 28 **D)** 14 **E)** 20

26. How many 3-digits numbers possess the following property: after subtracting 297 from such a number, we get a 3-digit number consisting of the same digits in the reverse order?
A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 60 **E)** 70

27. When Matthew and Marten found their old model railway, Matthew quickly made a perfect circle from 8 identical track parts, Marten starts to make another track with two of these pieces as shown in the picture. He wants to use as few pieces as possible to make a closed track. How many pieces does his track consist of?

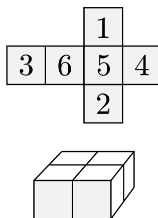


A) 11 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

28. There were 2013 inhabitants on an island. Some of them were knights and the others were liars. The knights always tell the truth and the liars always lie. Every day, one of the inhabitants said: “After my departure the number of knights on the island will equal the number of liars” and then left the island. After 2013 days there was nobody on the island. How many liars were there initially?
A) 0 **B)** 1006 **C)** 1007 **D)** 2013 **E)** It is impossible to determine.

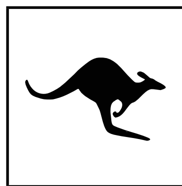
29. Starting with a list of three numbers, the “changesum” procedure creates a new list by replacing each number by the sum of the other two. For example, from $\{3, 4, 6\}$ “changesum” gives $\{10, 9, 7\}$ and a new “changesum” leads to $\{16, 17, 19\}$. If we begin with the list $\{20, 1, 3\}$, what is the maximum difference between two numbers of the list after 2013 consecutive “changesums”?
A) 1 **B)** 2 **C)** 17 **D)** 19 **E)** 2013

30. Alice forms 4 identical numbered cubes using the net shown. She then glues them together to form a $2 \times 2 \times 1$ block, as shown. Only faces with identical numbers are glued together. Alice then finds the total of all the numbers on the surface of the block. What is the largest total that Alice can get?

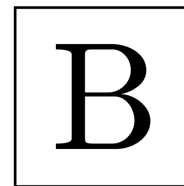


A) 66 **B)** 68 **C)** 72 **D)** 74 **E)** 76

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija — *VU Matematikos ir informatikos fakultetas*
Kengūros organizavimo komitetas — *Leidykla TEV* — *VU Matematikos ir informatikos institutas*



KANGAROO 2013

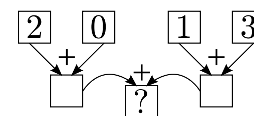


Time allowed: 75 min
Calculators are not permitted

Benjamin
5–6 grades

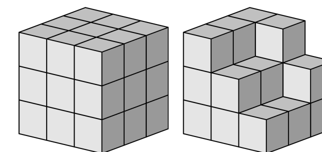
Questions for 3 points

1. We put 2, 0, 1, 3 into an adding machine, as shown. What is the result in the box with the question mark?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

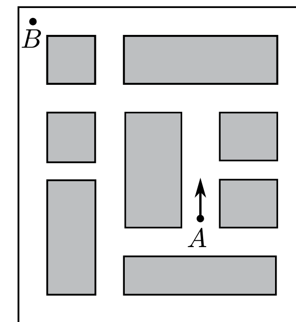
2. Nathalie wanted to build a cube as shown in the picture on the left. However, she ran out of small cubes and built only the part of the cube, as shown on the right. How many small cubes Nathalie need to finish the cube?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

3. Children went out for a walk. Everytime Martin makes 9 steps, David makes 8 steps and Peter makes 7. Martin makes 90 steps a minute. How many steps they will make all together during a 10 minute walk?
A) 240 **B)** 2013 **C)** 2400 **D)** 2700 **E)** 900

4. Nick is learning to drive. He knows how to turn right but cannot turn left. What is the smallest number of turns he must make in order to get from A to B (see the picture), starting in the direction of the arrow?
A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10



5. The sum of the ages of Ann, Bob and Chris is 31 years. What will the sum of their ages be in three years time?
A) 32 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 37 **E)** 40

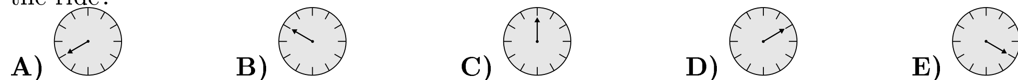
6. What digit must be placed in all three boxes $\square\square \cdot \square = 176$, in order to make the multiplication work?
A) 6 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 8

7. Michaels father eats an apple every 15 minutes. He ate his first apple at 11:05. What time did he eat his fourth apple?
A) 11:40 **B)** 11:50 **C)** 11:55 **D)** 12:00 **E)** 12:05

8. Ann rides her bicycle throughout the afternoon with constant speed. She sees her watch at the beginning and at the end with the following result:

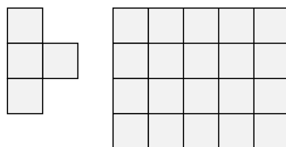


Which picture shows the position of the minutes hand when Ann finishes one third of the ride?



9. The number 36 has the property that it is divisible by the digit in the unit position, because 36 is divisible by 6. The number 38 does not have this property. How many numbers between 20 and 30 have this property?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

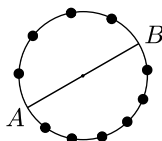
10. Ann has a lot of pieces like the one in the picture. She tries to put as many as possible in the 4 by 5 rectangle. The pieces may not overlap each other. What is the largest possible number of pieces Ann can put in the rectangle?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

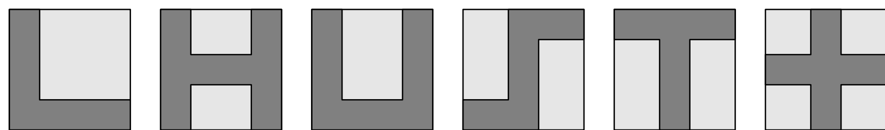
Questions for 4 points

11. How many segments which do not intersect diameter AB can one draw through 10 points shown in the picture?



A) 10 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 25 **E)** 15

12. Mary shades various shapes on square sheets of paper, as shown below. How many of these shapes have the same perimeter as the sheet of paper itself?

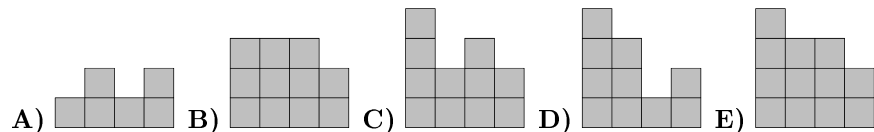


A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

13. John has made a building of cubes. In the picture this building and John standing besides it are shown from above. In each cell you see the number of cubes in that particular tower. Which shape will John see?

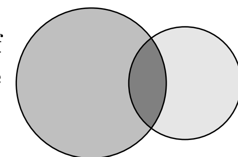
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

↑
John



14. Matthew is catching fish. If he had caught three times as many as he actually did, he would have 12 more. How many fish did he catch?
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

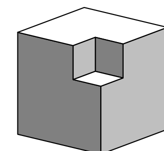
15. By drawing two circles, Mike obtained a figure, which consists of three regions (see picture). At most how many regions could he obtain by drawing two squares?



A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

16. In an election each of the five candidates got a different number of votes. The candidates received 36 votes in total. The winner got 12 votes. The candidate in last place got 4 votes. How many votes did the candidate in second place get?
A) Only 8 **B)** 8 or 9 **C)** Only 9 **D)** 9 or 10 **E)** Only 10

17. From a wooden cube with side 3 we cut out at the corner a little cube with side 1 (see picture). What is the number of faces of the solid after cutting out such a small cube at each corner of the big cube?



A) 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

18. Find the number of pairs of two-digit natural numbers whose difference is equal to 50.
A) 40 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 10

19. The final of the local hockey championship was a match full of goals. There were 6 goals in the first half and the guest team was leading after the first half. After the home team scored 3 goals in the second half, they won the game. How many goals did the home team score altogether?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

20. In the squares of the 4×4 board numbers are written such that the numbers in adjacent squares differ by 1. Numbers 3 and 9 appear in the table. Number 3 is in the top left corner as shown. How many different numbers appear in the table?

3			

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Questions for 5 points

21. Aron, Bern and Carl always lie. Each of them owns one stone, either a red stone or a green stone. Aron says: “My stone is the same color as Bern’s stone”, Bern says: “My stone is the same color as Carl’s stone”. Carl says: “Exactly two of us own red stones”. Which of the following statements is true?
A) Aron’s stone is green. **B)** Bern’s stone is green. **C)** Carl’s stone is red.
D) Aron’s and Carl’s stones have different colors **E)** None of **A**–**D** is true.

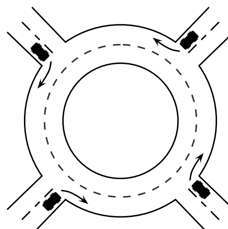
22. 66 cats signed up for the contest MISS CAT 2013. After the first round 21 were eliminated because they failed to catch mice. 27 cats out of those that remained in the contest had stripes and 32 of them had one black ear. All striped cats with one black ear got to the final. What is the minimum number of finalists?
A) 5 **B)** 7 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 27

23. Ola ate a part of chocolate bar and Ala ate a quarter of the remaining piece. Together they ate a half of the chocolate. What part of the chocolate bar did Ala eat?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{12}$

24. A gardener wants to plant twenty trees (maples and lindens) along an avenue in the park. The number of trees between any two maples must not be equal to three. Of these twenty trees, what is the greatest number of maples that the gardener can plant?
A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

25. Andrew and Daniel recently took part in a race. After they had finished, they noticed that Andrew finished ahead of twice as many runners as finished ahead of Daniel, and that Daniel finished ahead of 1.5 times as many runners as finished ahead of Andrew. Andrew finished in 21st place. How many runners took part in the race?
A) 31 **B)** 41 **C)** 51 **D)** 61 **E)** 81

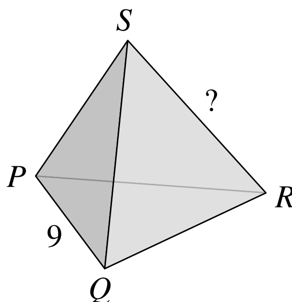
26. Four cars enter a roundabout at the same time, each one from a different direction, as shown in the diagram. Each of the cars drives less than once round the roundabout, and no two cars leave the roundabout in the same direction. How many different ways are there for the cars to leave the roundabout?
A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 81



27. A sequence starts 1, −1, −1, 1, −1, −1, 1. After the seventh term, every term is equal to the product of the two preceding terms. For example, the sixth term is equal to the product of the fourth term and the fifth term. What is the sum of the first 2013 terms?
A) −1006 **B)** −671 **C)** 0 **D)** 671 **E)** 1007

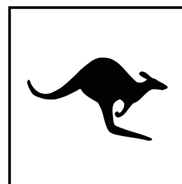
28. Ria bakes six raspberry pies one after the other, numbering them 1 to 6 in order, with the first being number 1. Whilst she is doing this, her children sometimes run into the kitchen and eat the hottest pie. Which of the following could not be the order in which the pies are eaten?
A) 1, 2, 3, 4, 5, 6 **B)** 1, 2, 5, 4, 3, 6 **C)** 3, 2, 5, 4, 6, 1 **D)** 4, 5, 6, 2, 3, 1 **E)** 6, 5, 4, 3, 2, 1

29. Each of the four vertices and six edges of a tetrahedron is marked with one of the ten numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 11 (number 10 is omitted). Each number is used exactly once. For any two vertices of the tetrahedron, the sum of two numbers at these vertices is equal to the number on the edge connecting these two vertices. The edge PQ is marked with the number 9. Which number is used to mark edge RS?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 11

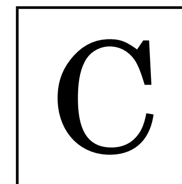


30. A positive integer N is smaller than the sum of its three greatest divisors (naturally, excluding N itself). Which of the following statements is true?
A) All such N are divisible by 4. **B)** All such N are divisible by 5.
C) All such N are divisible by 6. **D)** All such N are divisible by 7.
E) There is no such N.

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija *VU Matematikos ir informatikos fakultetas*
Kengūros organizavimo komitetas *Leidykla TEV* *VU Matematikos ir informatikos institutas*



KANGAROO 2013

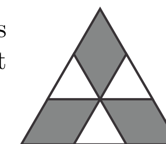


Time allowed: 75 min
Calculators are not permitted

Cadet
7–8 grades

Questions for 3 points

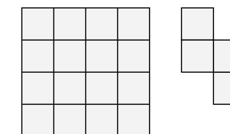
1. In the picture, the big triangle is equilateral and has area 9. The lines are parallel to the sides and divide the sides into three equal parts. What is the area of the shaded part?
A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



2. It is true that $\frac{1111}{101} = 11$. What is the value of $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$?
A) 5 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 55 **E)** 99

3. The difference between the largest 2-digit positive integer divisible by 7 and the smallest 2-digit positive integer divisible by 7 is equal to:
A) 70 **B)** 77 **C)** 84 **D)** 91 **E)** 98

4. Ann has the square sheet of paper shown on the left diagram (both sides of the sheet are lined). By cutting along the lines of the square, she cuts out copies of the shape shown on the right diagram. What is the smallest possible number of cells remaining?
A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8



5. Roo wants to tell Kanga a number with the product of its digits equal to 24. What is the sum of the digits of the smallest number that Roo could tell Kanga?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

6. A bag contains balls of four different colours. Two are red, three are blue, four are green and five are black. Balls are taken from the bag without looking, and not returned. What is the smallest number of balls that should be taken from the bag to be sure that two balls of the same colour have been taken?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 14

7. Alex lights a candle every ten minutes. Each candle burns for 40 minutes and then goes out. How many candles are alight 55 minutes after Alex lit the first candle?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8. The average number of children in five families cannot be:
A) 0.2 **B)** 1.2 **C)** 2.2 **D)** 2.4 **E)** 2.5

9. Mark and Liza stand on opposite sides of a circular fountain. They then start to run clockwise round the fountain. Mark's speed is $\frac{9}{8}$ of Liza's speed. How many circuits has Liza completed when Mark catches up with her for the first time?
A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 2 **E)** 72

10. The positive integers x, y and z satisfy $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ and $z \cdot x = 35$. What is the value of $x + y + z$?
A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

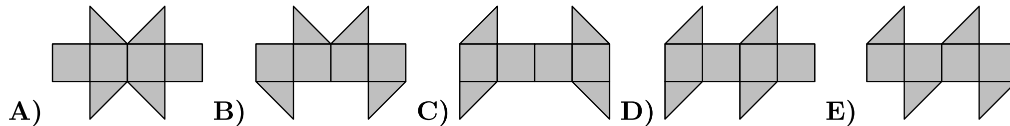
Questions for 4 points

11. Carina and a friend are playing a game of "battleships" on a 5×5 board. Carina has already placed two ships as shown. She still has to place a 3×1 ship so that it covers exactly three cells. No two ships can have a point in common. How many positions are there for her 3×1 ship?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

12. In the diagram, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ and $\gamma = 35°$. What is the value of δ?
A) 100° **B)** 105° **C)** 120° **D)** 125° **E)** 130°

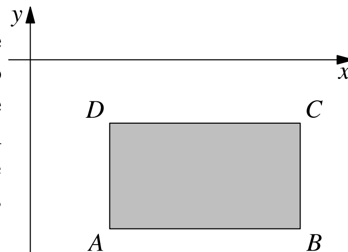
13. The perimeter of a trapezium is 5 and the lengths of its sides are integers. What are the smallest two angles of the trapezium?
A) 30° and 30° **B)** 60° and 60° **C)** 45° and 45° **D)** 30° and 60° **E)** 45° and 90°

14. One of the following nets cannot be folded to form a cube. Which one?



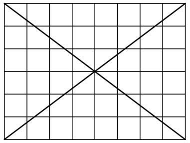
15. Vasya wrote down several consecutive integers. Which of the following could not be the percentage of odd numbers among them?
A) 40 **B)** 45 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 60

16. The edges of rectangle $ABCD$ are parallel to the coordinate axes. $ABCD$ lies below the x-axis and to the right of the y-axis, as shown in the figure. The coordinates of the four points A, B, C and D are all integers. For each of these points we calculate the value y-coordinate $\div$ x-coordinate. Which of the four points gives the least value?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** It depends on the rectangle



17. All 4-digit positive integers with the same four digits as in the number 2013 are written on the blackboard in an increasing order. What is the largest possible difference between two neighbouring numbers on the blackboard?
A) 702 **B)** 703 **C)** 693 **D)** 793 **E)** 198

18. In the 6×8 grid shown, 24 of the cells are not intersected by either diagonal. When the diagonals of a 6×10 grid are drawn, how many of the cells are not intersected by either diagonal?
A) 28 **B)** 29 **C)** 30 **D)** 31 **E)** 32

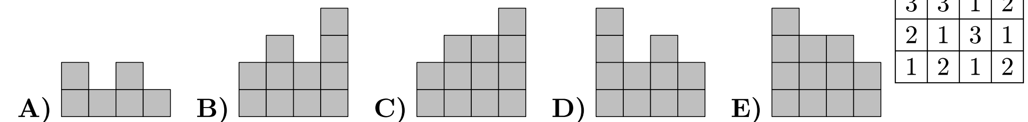


19. Andy, Betty, Cathie, Dannie and Eddy were born on 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 and 23/04/2001 (day/month/year). Andy and Eddy were born in the same month. Also, Betty and Cathie were born in the same month. Andy and Cathie were born on the same day of different months. Also, Dannie and Eddy were born on the same day of different months. Which of these children is the youngest?
A) Andy **B)** Betty **C)** Cathie **D)** Dannie **E)** Eddy

20. John has made a building of cubes. In the picture this building and John standing besides it are shown from above. In each cell you see the number of cubes in that particular tower. Which shape will John see?

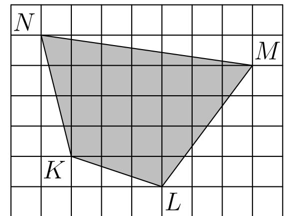
John ↓

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2



Questions for 5 points

21. The diagram shows a shaded quadrilateral $KLMN$ drawn on a grid. Each cell of the grid has sides of length 2 cm. What is the area of $KLMN$?
A) 96 cm^2 **B)** 84 cm^2 **C)** 76 cm^2 **D)** 88 cm^2 **E)** 104 cm^2



22. Let S be the number of squares among the integers from 1 to 2013^6. Let Q be the number of cubes among the same integers. Then:
A) $S = Q$ **B)** $2S = 3Q$ **C)** $3S = 2Q$ **D)** $S = 2013Q$ **E)** $S^3 = Q^2$

23. John chooses a 5-digit positive integer and deletes one of its digits to make a 4-digit number. The sum of this 4-digit number and the original 5-digit number is 52713. What is the sum of the digits of the original 5-digit number?
A) 26 **B)** 20 **C)** 23 **D)** 19 **E)** 17

24. We call "changesum" the procedure to make from a list of three numbers the new list by replacing each number by the sum of the other two. For example, from $\{3, 4, 6\}$ "changesum" gives $\{10, 9, 7\}$ and a new "changesum" leads to $\{16, 17, 19\}$. If we begin with the list $\{1, 2, 3\}$, how many consecutive "changesums" will be required to get the number 2013 in the list?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 2013 **E)** 2013 will never appear

25. The numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10 are written around the circle in arbitrary order. By adding to each number it's two neighbours, we obtain 10 sums. What is the maximum possible value of the smallest of these sums?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

26. On 22 cards positive integers from 1 to 22 are written. With these cards 11 fractions have been made. What is the greatest number of these fractions that can have integer values?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

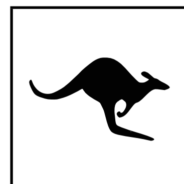
27. How many triangles are there, whose vertices are chosen from the vertices of a given regular polygon with 13 sides, and such that the centre of the circumcircle of the polygon is inside of the triangle?
A) 72 **B)** 85 **C)** 91 **D)** 100 **E)** Other value

28. A car left point A and drove along the straight road at a speed of 50 km/h. Then every hour a car left point A, and each next car was 1 km/h faster than the previous one. The last car (at a speed of 100 km/h) left 50 hours after the first one. What is the speed of the car which was in front of all the column 100 hours later after the start of the first car?
A) 50 km/h **B)** 66 km/h **C)** 75 km/h **D)** 84 km/h **E)** 100 km/h

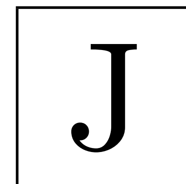
29. 100 trees (oaks and birches) grow along a road. The number of trees between any two oaks does not equal 5. What greatest number of oaks can be among these 100 trees?
A) 48 **B)** 50 **C)** 52 **D)** 60 **E)** The situation is not possible

30. Yurko was walking down the street when he saw a tractor that was pulling a long pipe. To measure its length, Yurko walked along the pipe against the movement of the tractor and counted 20 steps. Then he walked along the pipe with the movement of the tractor and counted 140 steps. Yurko's step equals 1 m. His and tractor's speed were constant. What is the length of the pipe?
A) 30 m **B)** 35 m **C)** 40 m **D)** 48 m **E)** 80 m

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija *VU Matematikos ir informatikos fakultetas*
Kengūros organizavimo komitetas *Leidykla TEV* *VU Matematikos ir informatikos institutas*



KANGAROO 2013



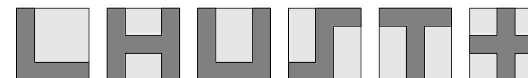
Time allowed: 75 min
Calculators are not permitted

Junior
9–10 grades

Questions for 3 points

1. The number $200013 - 2013$ is not divisible by:
A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

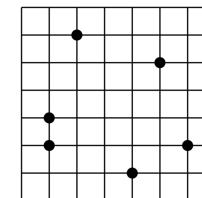
2. Mary shades various shapes on square sheets of paper, as shown below.



How many of these figures have perimeter equal to the perimeter of the sheet of paper?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

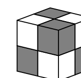
3. Mrs. Margareth bought 4 cobs of corn for everyone in her 4-member family. In the shop she got the discount the shop offered: "Corn sale! 1 cob for 20 cents! Every sixth cob is for free!". How much did she pay?
A) 0,80 EUR **B)** 1,20 EUR **C)** 2,80 EUR **D)** 3,20 EUR **E)** 80 EUR

4. Three of the numbers 2, 4, 16, 25, 50, 125 have product 1000. What is their sum?
A) 70 **B)** 77 **C)** 131 **D)** 143 **E)** None of the previous

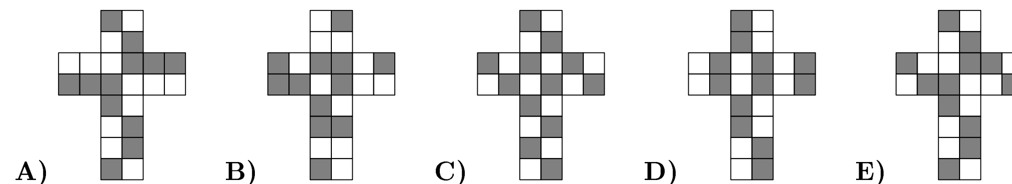


5. Six points are marked on a square grid with cell of size 1. What is the smallest area of a triangle with vertices at marked points?
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** 2

6. Adding 4^{15} to 8^{10}, Mihai has obtained a number which is a power of 2. The number equals:
A) 2^{10} **B)** 2^{15} **C)** 2^{20} **D)** 2^{30} **E)** 2^{31}

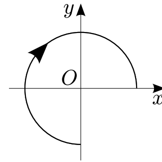


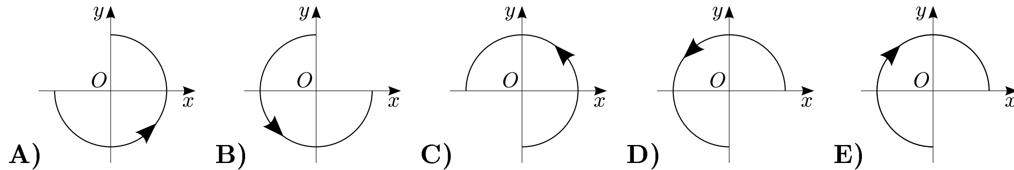
7. On the outside a cube is painted with black and white squares as if it was built of four white and four black smaller cubes. Which of the following is a correct building scheme for this cube?



8. The number n is the largest positive integer for which $4n$ is a 3-digit number, and m is the smallest positive integer for which $4m$ is a 3-digit number. What is the value of $4n - 4m$?
A) 900 **B)** 899 **C)** 896 **D)** 225 **E)** 224

9. Consider a three-quarter circle with center O and an orientation arrow as indicated in the picture on the right. What is the position of the oriented three-quarter circle when it is first rotated counterclockwise by $90°$ around O and then reflected at the x-axis?

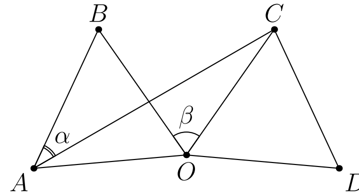




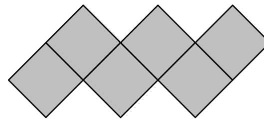
10. Which of the following numbers is the largest?
A) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{20} \cdot 13$ **C)** $20 \cdot \sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{201} \cdot 3$ **E)** $\sqrt{2013}$

Questions for 4 points

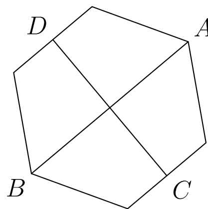
11. Triangle COD is the image of the equilateral triangle AOB upon rotation around O, whereby $\beta = \angle BOC = 70°$. Determine the angle $\alpha = \angle BAC$.
A) 20° **B)** 25° **C)** 30° **D)** 35° **E)** 40°



12. The figure below shows zigzag of six unit squares. Its perimeter is 14. What is the perimeter of a zigzag made in the same way consisting of 2013 squares?
A) 2022 **B)** 4028 **C)** 4032 **D)** 6038 **E)** 8050

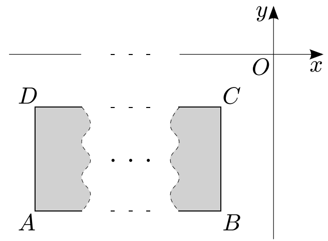


13. The segment AB connects two opposite vertices of a regular hexagon. The segment CD connects the midpoints of two opposite sides. Find the product of the lengths of AB and CD if the area of the hexagon is 60.
A) 40 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 100



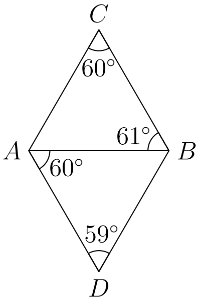
14. A class of students had a test. If each boy had got 3 points more for the test, then the average result of the class would had been 1,2 points higher than now. How many percent of the students of the class are girls?
A) 20% **B)** 30% **C)** 40% **D)** 60% **E)** It is impossible to determine

15. The sides of rectangle $ABCD$ are parallel to the coordinate-axes (see pic.). We calculate for each of these points the number y-coordinate $\div$ x-coordinate. Which of the four points gives the smallest number?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D
E) It is impossible to determine



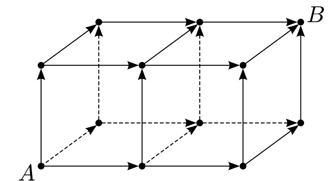
16. Today John and his son are celebrating their birthday. John multiplied correctly his age by the age of his son and obtained the answer 2013. In which year was John born?
A) 1981 **B)** 1982 **C)** 1953 **D)** 1952 **E)** More information is needed

17. John wanted to draw two equilateral triangles attached to get a rhombus. But he did not hit correctly all the distances and, once he had done, Jane measured the four angles and saw that they were not equal (see pic.). Which of the five segments of the figure is the longest?
A) AD **B)** AC **C)** AB **D)** BC **E)** BD



18. Five consecutive positive integers have the following property: three of them have the same sum as the sum of other two. How many such sets of integers exist?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** More than 3

19. What is the number of all different paths going from the point A to the point B at the given graph?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15



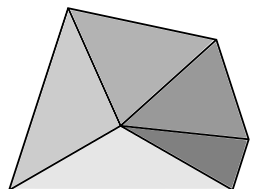
20. A six-digit positive integer is given. The sum of its digits is an even number, the product of its digits is an odd number. Which statement about this number might be correct?
A) Either two or four digits of the number are even **B)** Such a number cannot exist
C) The amount of the odd digits of the number is odd
D) The number has six different digits **E)** None of the above

Questions for 5 points

21. How many decimal places are there in the decimal number $\frac{1}{1024000}$?
A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 1024000

22. How many positive integers are multiples of 2013 and have exactly 2013 positive divisors (including 1 and the number itself)?
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** Another number

23. The picture shows a polygon divided into five isosceles triangles with top angles 24°, 48°, 72°, 96° and 120°– the first multiples of the smallest top angle. All top angles have an integer number of degrees. We want to make a similar picture with as many non-overlapping triangles as possible. How many degrees is the smallest top angle in that case?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 8



24. How many solutions (x, y), where x and y are real numbers, does the equation $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ have?
A) 1 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** Infinitely many

25. Let $\mathbb{N}_0$ be the set of non-negative integers. Let $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ be the function defined by $f(2n) = f(2n+1) = n$ for all non-negative integers n. For every k, $f^k(n)$ denotes the number represented by the expression $f(f(...f(n)...))$, where the symbol f appears k times. The number of solutions of the equation $f^{2013}(n) = 1$ is:
A) 0 **B)** 4026 **C)** 2^{2012} **D)** 2^{2013} **E)** Infinite

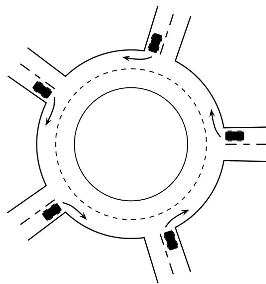
26. There are some straight lines drawn on the plane. Line a intersects exactly three other lines and line b intersects exactly four other lines. Line c intersects exactly n other lines, with $n \neq 3, 4$. Determine the number of lines drawn on the plane.
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** Another number

27. The sum of the first n positive integers is a three-digit number in which all of the digits are the same. What is the sum of the digits of n?
A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

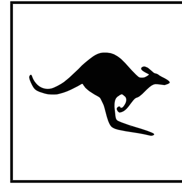
28. On the island of Knights and Knaves there live only two types of people: Knights (who always speak the truth) and Knaves (who always lie). I met two men who lived there and asked the taller man if they were both Knights. He replied, but I could not figure out what they were, so I asked the shorter man if the taller was a Knight. He replied, and after that I knew which type they were. Were the men Knights or Knaves?
A) They were both Knights
B) They were both Knaves
C) The taller was a Knight and the shorter was a Knave
D) The taller was a Knave and the shorter was a Knight
E) Not enough information is given

29. Iulian has written an algorithm in order to create a sequence of numbers as $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, where m and n are positive integers. Find the value of a_{100}.
A) 100 **B)** 1000 **C)** 2012 **D)** 4950 **E)** 5050

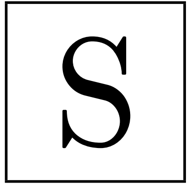
30. The roundabout shown in the picture is entered by 5 cars at the same time, each one from a different direction. Each of the cars drives less than one round and no two cars leave the roundabout in the same direction. How many different combinations are there for the cars leaving the roundabout?
A) 24 **B)** 44 **C)** 60 **D)** 81 **E)** 120



Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija *VU Matematikos ir informatikos fakultetas*
Kengūros organizavimo komitetas *Leidykla TEV* *VU Matematikos ir informatikos institutas*



KANGAROO 2013



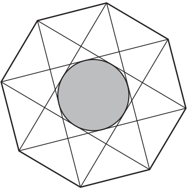
Time allowed: 75 min
Calculators are not permitted

Student
11–12 grades

Questions for 3 points

1. Which of the following numbers is the largest?
A) 2013 **B)** 2^{0+13} **C)** 20^{13} **D)** 201^3 **E)** $20 \cdot 13$

2. The regular octagon of the figure measures 10 on each side. Which is the measure of the radius of the circle inscribed in the smallest octagon formed by the diagonals?
A) 10 **B)** 7,5 **C)** 5 **D)** 2,5 **E)** 2



3. A prism has 2013 faces in total. How many edges has the prism?
A) 2011 **B)** 2013 **C)** 4022 **D)** 4024 **E)** 6033

4. The cube root of 3^{3^3} is equal to:
A) 3^3 **B)** 3^{3^3-1} **C)** 3^{2^3} **D)** 3^{3^2} **E)** $(\sqrt{3})^3$

5. The year 2013 has the property that its number is made up of the consecutive digits 0, 1, 2 and 3. How many years have passed since the last time a year was made up of some four consecutive digits?
A) 467 **B)** 527 **C)** 581 **D)** 693 **E)** 990

6. Let f be a linear function for which $f(2013) - f(2001) = 100$. What is $f(2031) - f(2013)$?
A) 75 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

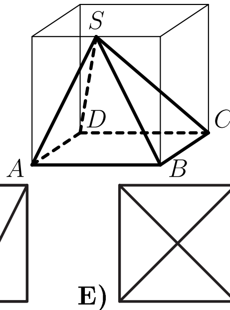
7. Given that $2 < x < 3$ how many of the statements

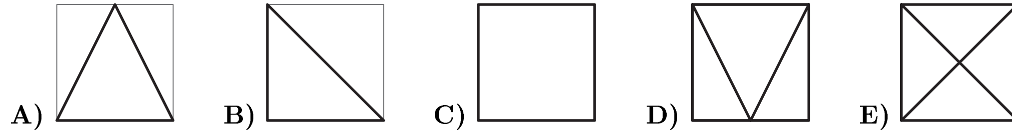
$$4 < x^2 < 9, \quad 4 < 2x < 9, \quad 6 < 3x < 9, \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

are necessarily true?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8. Six superheroes capture 20 villains. The first superhero captures one villain, the second captures two villains and the third captures three villains. The fourth superhero captures more villains than any of the other five. What is the smallest number of villains the fourth superhero must have captured?
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

9. In the transparent cube below you see a solid not transparent pyramid $ABCDS$ with base $ABCD$, whose vertex S lies exactly in the middle of an edge of the cube. You look at this pyramid from above, from below, from behind, from ahead, from the right and from the left. Which view does not arise?

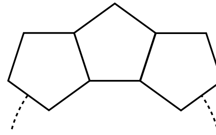




10. When a certain solid substance melts, its volume increases by $\frac{1}{12}$. By how much does its volume decrease when it solidifies again?
A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{14}$

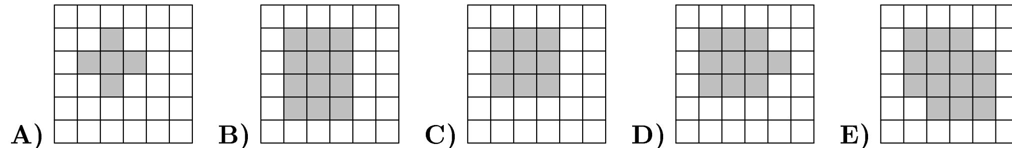
Questions for 4 points

11. Radu has identical plastic pieces in the shape of a regular pentagon. He glues them edge to edge to complete a circle - as shown in the picture. How many pieces are there in this circle?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15



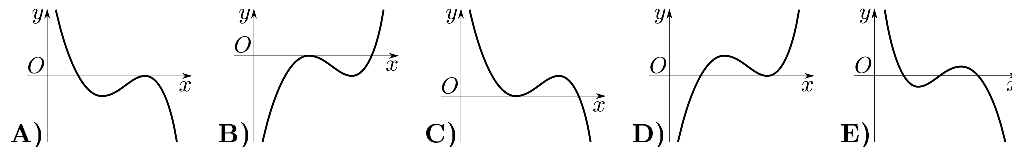
12. How many positive integers n exist such that both $\frac{n}{3}$ and $3n$ are three-digit integers?
A) 12 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 100 **E)** 300

13. A circular carpet is placed on a floor of square tiles. All the tiles which have more than one point in common with the carpet are marked grey. Which of the following is an impossible outcome?



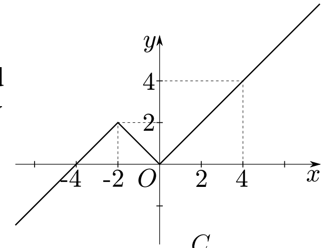
14. Consider the following proposition about a function f which is defined on the set of integers and takes integer values: “For any even x, $f(x)$ is even.” If this proposition is false then it follows that:
A) For any even x, $f(x)$ is odd
B) For any odd x, $f(x)$ is even
C) For any odd x, $f(x)$ is odd
D) There exists an even number x such that $f(x)$ is odd
E) There exists an odd number x such that $f(x)$ is odd

15. Given a function $W(x) = (a-x)(b-x)^2$, where $a < b$. Its graph is in one of the following figures. In which one?

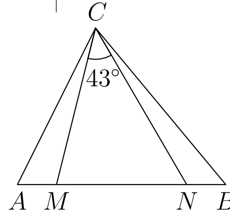


16. Consider a rectangle, one of whose sides has length 5. The rectangle can be cut into a square and a rectangle, one of which has the area 4. How many such rectangles exist?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17. Vlad has drawn the graph of a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, composed of two rays and a line segment (see figure). How many solutions does the equation $f(f(f(x))) = 0$ have?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0



18. In the triangle ABC the points M and N on the side AB are such that $AN = AC$ and $BM = BC$. Find $\angle ACB$ if $\angle MCN = 43°$.
A) 86° **B)** 89° **C)** 90° **D)** 92° **E)** 94°



19. How many pairs (x, y) of positive integers satisfy the equation $x^2y^3 = 6^{12}$?
A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** Another number

20. A box contains 900 cards numbered from 100 to 999. Any two cards have different numbers. François picks some cards and determines the sum of the digits on each of them. At least how many cards must he pick in order to be certain to have three cards with the same sum?
A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

Questions for 5 points

21. How many pairs (x, y) of integers with $x \leqslant y$ exist such that their product equals 5 times their sum?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

22. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the function defined by the following properties: f is periodic with period 5 and the restriction of f to $[-2, 3)$ is $x \mapsto f(x) = x^2$. What is $f(2013)$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9

23. The solid cube in the figure is cut by a plane passing through the three neighbouring vertices D, E and B of A. Similarly, the cube is cut by planes passing through the three neighbouring vertices of all other seven corners. What will the piece containing the center of the cube look like?

